
CORNELL
UNIVERSITY
LIBRARIES


Desargues'
Theorem




3 1924 059 413 462

RÉDUCTION

DES

INTÉGRALES DÉFINIES GÉNÉRALES

$$\int_0^\infty F(x) \frac{Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}, \int_0^\infty F(x) \frac{Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2},$$

ET APPLICATION DE CES FORMULES AU CAS,
QUE F (x) A UN FACTEUR DE LA FORME $Sin.^a\,x$ ou $Cos.^a\,x$.

PAR

D. BIERENS DE HAAN

Publiée par l'Académie Royale des Sciences à Amsterdam.

AMSTERDAM,
C. G. VAN DER POST.
1857.

SOMMAIRE.

I. § 1 à 5. Démonstration de quelques (15) théorèmes généraux.

II. § 6 à 13. Application de ces théorèmes, lorsqu'on prend $Cos.^a\, x$, $x\, Cos.^a\, x$, $Sin.^a\, x$, $x\, Sin.^a\, x$ pour $F(x)$. — Valeurs de quelques intégrales définies.

III. § 14, 15. Démonstration de quelques (4) théorèmes généraux, pour les cas, où $F(x)$ est une fraction, qui ait la fonction $1 - 2\, p\, Cos.\, x + p^2$ pour dénominateur. — Applications de ces théorèmes: valeurs de quelques intégrales définies.

IV. § 16. Démonstration de quelques (10) théorèmes généraux sur les intégrales définies générales:

$$\int_0^\infty F(x) \frac{Cos.^a\, x.\, Cos.\, p\, x}{q^2 + x^2}\, d\, x\,, \int_0^\infty F(x) \frac{Cos.^a\, x.\, Sin.\, p\, x}{q^2 + x^2}\, d\, x\,,$$

$$\int_0^\infty F(x) \frac{Sin.^a\, x.\, Cos.\, p\, x}{q^2 + x^2}\, d\, x \quad \int_0^\infty F(x) \frac{Sin.^a\, x.\, Sin.\, p\, x}{q^2 + x^2}\, d\, x\,.$$

V. § 17 à 24. Applications de ces derniers théorèmes. Valeurs de quelques intégrales définies.

RÉDUCTION

DES

INTÉGRALES DÉFINIES GÉNÉRALES

$$\int_0^\infty F(x)\frac{Cos. p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\;,\;\int_0^\infty F(x)\frac{Sin. p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\;,$$

ET APPLICATION DE CES FORMULES AU CAS,
QUE F (x) A UN FACTEUR DE LA FORME $Sin.^a x$ ou $Cos.^a x$.

PAR

D. BIERENS DE HAAN.

I. DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX.

1. Parmi toutes les méthodes différentes, que l'on a imaginées et appliquées à l'évaluation des intégrales définies, il y en a auxquelles le développement en série sert de base: et parmi celles-ci de nouveau, l'on distingue la suivante, qui est assez connue.

Après avoir développé un facteur quelconque de la fonction à intégrer dans une série, cette fonction se trouve elle-même développée dans une telle série: lorsque donc on prend l'intégrale de cette fonction, on aura une série d'intégrales partielles, au lieu de l'intégrale de la série elle-même, comme un des premiers théorèmes de la théorie des fonctions nous l'apprend. Dans le cas que toutes ces intégrales partielles, qui en général se trouveront être pour la plupart ou même toutes d'une même forme, sont connues, on connait par suite aussi l'intégrale cherchée; mais cette valeur a en général la forme d'une série, et ne se présente sous forme finie que dans quelques cas spéciaux; néanmoins la première forme peut aussi offrir ses avantages particuliers.

On peut appliquer cette méthode à l'intégrale définie générale

$$\mathrm{I} = \int_a^b f(x) \,.\, \varphi(x)\, dx\,,$$

lorsqu'une des fonctions, par exemple $\varphi(x)$, est développable dans une série, dont les termes dépendent des Cosinus ou des Sinus des multiples successifs de la variable, c'est-à-dire, lorsqu'on a:

$$\varphi_1(x) = \mathrm{A}_0 + \sum_1^c \mathrm{A}_n\, Cos.\, n s x \text{ ou } \varphi_2(x) = \sum_1^c \mathrm{B}_n\, Sin\; n s x\,;\; ^{*)} \;\ldots\;\; (a)$$

car alors l'intégrale I consiste dans une série de termes, qui auront la forme

$$\int_a^b f(x)\, Cos.\, n s x\, dx \text{ ou } \int_a^b f(x)\, Sin.\, n s x dx\,;$$

et l'on a, en désignant notre intégrale dans les deux cas précédents par I_1 et I_2, correspondantes à la forme $\varphi_1(x)$ ou $\varphi_2(x)$ dans les formules (a),

$$\mathrm{I}_1 = \int_a^b f(x)\varphi_1(x)\, dx = \int_a^b f(x)dx \left\{\mathrm{A}_0 + \sum_1^c \mathrm{A}_n Cos.\, n s x\right\} = \mathrm{A}_0 \int_a^b f(x)dx + \sum_1^c \mathrm{A}_n \int_a^b f(x)\, Cos.\, n s x dx, \quad (\mathrm{A})$$

$$\mathrm{I}_2 = \int_a^b f(x)\varphi_2(x)dx = \int_a^b f(x)\, dx \sum_1^c \mathrm{B}_n\, Sin.\, n s x = \sum_1^c \mathrm{B}_n \int_a^b f(x) Sin.\, n s x dx. \quad (\mathrm{B})$$

Mais ces deux formules générales donnent lieu à quelques observations. En premier lieu, c peut être un nombre fini, de sorte que la série d'intégrales dans ces formules est elle-même finie, alors les formules (a), (A) et (B) valent toujours sans aucune restriction. Au contraire cela n'a pas toujours lieu, quand c devient infini, que la série dans ces formules se prolonge à l'infini elle-même: il faut alors, que les séries (a) soient convergentes pour toutes les valeurs de x, situées entre les limites a et b de l'intégration; et encore faut-il que les séries (A) et (B) soient convergentes, lorsque les intégrations ont été effectuées. Ces conditions sont évidentes: or, la première

---

*) Le signe de sommation $\sum_1^c f(n)$

désigne ici, et par la suite, la série $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots\ldots\ldots f(c)$;
où l'on voit que la lettre n représente l'argument qui parcourt la suite des nombres naturels de $n = 1$ à $n = c$, et où c doit toujours être un nombre entier.

est nécessaire lorsqu'on veut intégrer ces séries entre les limites a et b, car les équations (a) ne seraient plus toujours identiques dans le cas contraire et ne donneraient plus de relation entre la série et la fonction, qu'elle doit représenter: il n'est plus permis de substituer identiquement les séries aux fonctions, et tout le raisonnement, qui a conduit aux formules (A) et (B), perd son exactitude. Pour les limites a et b elles-mêmes pourtant cette condition n'est pas de rigueur, car il arrive fréquemment, qu'après l'intégration le résultat, c'est-à-dire les intégrales

$$\int_a^b f(x)\, Cos.\, n s x\, dx \quad \text{ou} \quad \int_a^b f(x)\, Sin.\, n s x\, dx,$$

obtiennent néanmoins une valeur parfaitement définie, et alors les équations (A) et (B) ne cessent de subsister. Mais en second lieu ces séries-ci doivent être convergentes elles-mêmes après l'intégration, ce qui est bien clair; puisqu'autrement elles manqueraient de somme, et que dès-lors cette somme ne saurait être représentée par les intégrales définies I_1 ou I_2.

Quant à l'usage de ces formules générales (A) et (B), l'on s'aperçoit aisément que la fonction $f(x)$ doit avoir une telle forme, que les trois intégrales

$$\int_a^b f(x)\, dx\,,\ \int_a^b f(x)\, Cos.\, n s x\, dx \ \text{ et } \int_a^b f(x)\, Sin.\, n s x\, dx \quad \ldots\ldots\ldots \quad (b)$$

obtiennent une valeur finie et connue. Mais alors aussi les derniers membres de ces formules sont des séries, qui dépendent seulement des constantes, que l'on trouve dans l'intégrale cherchée; et ces séries donnent lieu à des résultats d'une classe différente, selon qu'elles peuvent être regardées ou non comme les développements d'une fonction connue quelconque. Dans le premier cas, l'on obtient une valeur finie pour l'intégrale définie correspondante et l'on a effectué une évaluation proprement dite; au cas contraire, que la série ne peut pas se réduire au développement d'une fonction connue, et en outre qu'elle est infinie — car une série finie retomberait sous la catégorie des fonctions finies — l'on acquiert une relation entre une intégrale définie d'un côté et une série infinie de l'autre; une de ces relations, qui souvent sont d'un grand intérêt tant pour la théorie des intégrales définies, que pour celle des séries infinies.

2. Pour notre but actuel, soit $a = o$, $b = \infty$ et prenons $f(x) = \frac{q}{q^2 + x^2}$, les intégrales ($b$) deviendront:

$$\int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2},\int_0^\infty \frac{q\,Cos.\,nsx\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-nqs},\int_0^\infty \frac{q\,Sin.\,nsx\,dx}{q^2+x^2}=\frac{1}{2}\left[e^{-nqs}Ei.(nqs)-e^{nqs}Ei.(-nqs)\right]. \quad (c)$$

Pour $f(x)=\frac{x}{q^2+x^2}$ au contraire les mêmes intégrales donnent:

$$\int_0^\infty \frac{x\,dx}{q^2+x^2}=\frac{1}{2}\,l\,\infty=\infty\,,\int_0^\infty \frac{x\,Cos.\,nsx\,dx}{q^2+x^2}=-\frac{1}{2}\left[e^{nqs}Ei.(-nqs)+e^{-nqs}Ei.(nqs)\right],$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.\,nsx\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}e^{-nqs} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (d)$$

Observons que ces six formules d'intégrales définies se trouvent dans mes Tables d'Intégrales Définies etc. (Voir Tome IV de ces Mémoires, respectivement à la T. 19. N°. 2, T. 205. N°. 5, T. 205. N°. 10, comme somme de T. 5. N°. 9 (pour $p=q=1$) et de T. 31. N°. 13, à la T. 205. N°. 11, et T. 205. N°. 6, où l'on pourra consulter la litérature, ce qui nous épargnera la peine de les déduire ici. *)

Il résulte des formules (c) et (d) que la supposition $f(x)=\frac{q}{q^2+x^2}$ est possible dans les formules (A) et (B) toutes deux, tandis que l'autre $f(x)=\frac{x}{q^2+x^2}$ n'est en général permise que dans la seule formule (B), attendu que dans la formule (A) elle conduirait à un résultat infini. On parvient donc au moyen des équations générales (A) et (B) aux formules suivantes:

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{q\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}A_0+\frac{\pi}{2}\sum_1^c A_n e^{-nqs}=\frac{\pi}{2}\sum_0^c A_n e^{-nqs} \quad \ldots\ldots \quad (C)$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{q\,dx}{q^2+x^2}=\frac{1}{2}\sum_1^c A_n\left[e^{-nqs}Ei.(nqs)-e^{nqs}Ei.(-nqs)\right] \quad \ldots\ldots \quad (D)$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=\infty \quad \ldots\ldots \quad (E)$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=\frac{\pi}{2}\sum_1^c B^n e^{-nqs} \quad \ldots\ldots \quad (F)$$

---

*) Ici la fonction $Ei\,(a)$, l'Exponentielle intégrale, désigne l'intégrale:

$$Ei.(x)=\int_{-a}^\infty \frac{e^{-x}dx}{x}$$

Dans la formule (C) on a compris le premier terme détaché A_0 sous le signe de sommation; et cela est permis puisque le terme général $A_n e^{-nqs}$ n'est pour $n = 0$ rien d'autre que A_0. Au lieu de la formule (E), qui est peu utile sous cette forme-là, on pourra aisément obtenir une autre intégrale plus convenable; prenons au lieu de $\varphi_1(x)$ la fonction

$$\varphi_1(x) - \varphi_1'(x), \text{où } \varphi_1'(x) = A_0' + \sum_1^{c'} A_n' \, Cos.\, n s' x.$$

Aussitôt que A_0' devient égal à A_0, comme nous l'admettons ici, l'on a

$$\varphi_1(x) - \varphi_1'(x) = \sum_1^{c} A_n \, Cos.\, n s x - \sum_1^{c'} A_n' \, Cos.\, n s' x; \quad \ldots\ldots\ldots \quad (e)$$

et lorsqu'à présent on fait usage de la formule générale (A), le premier terme, qui était infini comme facteur de A_0, s'évanouit, et l'on a:

$$\int_0^\infty \{\varphi_1(x) - \varphi_1'(x)\} \frac{x\,dx}{q^2 + x^2} = -\frac{1}{2} \sum_1^{c} A_n \left[e^{nqs} Ei.(-nqs) + e^{-nqs} Ei.(nqs) \right]$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_1^{c'} A_n' \left[e^{nqs'} Ei.(-nqs') + e^{-nqs'} Ei.(nqs') \right]. \quad (E_1)$$

3. Mais si nous considérons les formules (*c*) et (*d*) plus attentivement, elles nous apprennent, que la fonction $f(x)$ peut encore contenir comme facteurs les fonctions circulaires directes $Sin.\, p x$ et $Cos.\, p x$, sans que pour cela les intégrales (*b*) changent de nature. Supposons en effet en premier lieu:

$$f(x) = \frac{q \, Sin.\, p x}{q^2 + x^2} \text{ et } f(x) = \frac{q \, Cos.\, p x}{q^2 + x^2},$$

alors les formules (*b*) deviennent:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{q \, Sin.\, p x \, dx}{q^2 + x^2} = \frac{1}{2} \left[e^{-pq} Ei.(pq) - e^{pq} Ei.(-pq) \right] \\
&\int_0^\infty \frac{q \, Sin.\, p x . Cos.\, n s x \, dx}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2 + x^2} \, \frac{Sin.\, \{(p + ns)x\} + Sin.\, \{(p - ns)x\}}{2} \\
&\int_0^\infty \frac{q \, Sin.\, p x . Sin.\, n s x \, dx}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2 + x^2} \, \frac{Cos.\, \{(p - ns)x\} - Cos.\, \{(p + ns)x\}}{2} = \\
&\qquad = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2 + x^2} \, \frac{Cos.\, \{(ns - p)x\} - Cos.\, \{(ns + p)x\}}{2}
\end{aligned}\right\} (f)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{q\,Cos.p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-pq} \\
&\int_0^\infty \frac{q\,Cos.p\,x.\,Cos.n\,s\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,d\,x}{q^2+x^2}\,\frac{Cos.\,\{(p-n\,s)x\}+Cos.\,\{(p+n\,s)\,x\}}{2} = \\
&\qquad\qquad \int_0^\infty \frac{q\,d\,x}{q^2+x^2}\,\frac{Cos.\,\{(n\,s-p)\,x\}+Cos.\,\{(n\,s+p)\,x\}}{2} \\
&\int_0^\infty \frac{q\,Cos.p\,x.\,Sin.\,n\,s\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\,d\,x}{q^2+x^2}\,\frac{Sin.\,\{(p+n\,s)x\}-Sin.\,\{(p-n\,s)\,x\}}{2}
\end{aligned}\right\}(f)$$

Dans les formules deuxième, troisième, cinquième et sixième, on a déjà transformé un facteur sous le signe d'intégration, qui était un produit de deux fonctions circulaires directes, dans une somme ou une différence de deux fonctions semblables, selon les règles connues de la Goniométrie: de sorte que ces intégrales définies seraient partagées en deux autres, dont les valeurs sont déjà données par les formules (c). Mais ici il ne faut absolument pas perdre de vue, que la seconde de ces intégrales (c) ne vaut que pour le cosinus d'un arc *positif.* Or, dans les intégrales, dont il est question maintenant, l'arc $(p+ns)x$ est toujours positif; mais dans l'autre arc $(p-ns)x$ le signe dépend du coefficient $p-ns$: et comme dans les sommations des équations générales (A) et (B) n doit parcourir la suite des nombres naturels depuis 1 jusqu'à c, $p-ns$ est positif aussi longtemps que ns est plus petit que p ou bien n plus petit que $\frac{p}{s}$, mais s'évanouit lorsque ns est égal à p ou n égal à $\frac{p}{s}$, et même devient négatif lorsque ns devient plus grand que p ou bien n plus grand que $\frac{p}{s}$. Il s'ensuit, qu'en général l'on doit décomposer les sommations qui dépendent de cette deuxième intégrale (c), au lieu de les prendre depuis $n=1$ à $n=c$: et cela bien dans deux autres sommations, dont l'une va de 1 à d, et l'autre de $d+1$ à c, pourvu que d représente le plus grand nombre entier, qui soit contenu dans $\frac{p}{s}$, de sorte que l'on ait $p=ds+p'$, $p'<s$, $d<c$.

C'est seulement dans le cas que ns reste toujours plus petit que p et que sa plus grande valeur cs est encore moindre que p, que la seconde de ces

sommations n'a plus lieu, et que l'on garde la forme originelle, puisqu'alors $p - ns$ reste constamment positif entre les limites de la sommation.

Mais aussitôt que $\frac{p}{s}$ est un nombre entier, c'est-à-dire que l'on a $p = ds$ et $p' = 0$, les intégrales (b) acquièrent une autre valeur spéciale pour $n = d$, car alors on a:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{q\, Sin.px.Sin.nsx\,dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\, Sin.px.Sin.px\,dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\, Sin.^2 px\,dx}{q^2+x^2} = \\
&\quad = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2+x^2}\frac{1-Cos.2px}{2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} - \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}e^{-2pq} = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2pq}), \\
&\int_0^\infty \frac{q\, Cos.px.Cos.nsx\,dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\, Cos.px.Cos.px\,dx}{q^2+x^2} = \int_0^\infty \frac{q\, Cos.^2 px\,dx}{q^2+x^2} = \\
&\quad = \int_0^\infty \frac{q\,dx}{q^2+x^2}\frac{1+Cos.2px}{2} = \frac{1}{2}\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\frac{\pi}{2}e^{-2pq} = \frac{\pi}{4}(1+e^{-2pq}),
\end{aligned}\right\} ,\ ns = p; \quad \ldots\ldots (g)$$

où de nouveau l'on a fait usage des deux premières intégrales (c) *). Il n'y a donc pas lieu de les employer aussi longtemps que cs est plus grand que p; mais aussitôt que cs devient égal à p, il faut sommer les premières expressions des formules (f) depuis $n = 1$ à $n = c - 1$, et prendre ensuite pour $n = c$, la valeur correspondante dans les formules (g). Lorsque dans le même cas ns était plus grand que p, l'on doit prendre les premières expressions dans les formules (f), depuis $n = 1$ jusqu'à $n = d - 1$, celle de l'équation (g) pour $n = d$, et sommer ensuite les secondes valeurs dans les formules (f) depuis $n = d + 1$ à $n = c$.

Ce que l'on vient d'observer à l'égard des intégrales, qui dépendent de la deuxième des intégrales (c), n'a pas d'influence auprès des deux autres formules de (f), qui dépendent au contraire de la troisième de ces intégrales (c), et cela puisque celle-ci vaut tout de même pour le Sinus d'un arc négatif, comme la réduction le prouve facilement. Car on a généralement

---

*) On trouve ces deux intégrales (g) dans mes „Tables d'Intégrales définies." T. 205. N°. 21. (dans le cas de $p = 1$) et T. 205. N°. 23.

$$\int_0^\infty \frac{q\,Sin.(-rx)\,dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\left[e^{rq}\,Ei.(-rq) - e^{-rq}\,Ei.(rq)\right] =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[e^{-rq}\,Ei.(rq) - e^{rq}\,Ei.(-rq)\right] = -\int_0^\infty \frac{q\,Sin.(+rx)\,dx}{q^2+x^2}$$

Ici donc il n'importe pas, que r soit représenté par $p-ns$ ou bien par $ns-p$, c'est-à-dire le résultat est exact, soit que $p-ns$ soit positif, ou qu'il soit négatif.

L'on peut donc à présent rassembler les cas discutés et les résultats des diverses observations dans les formules suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{q\,Sin.px\,dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\left[e^{-pq}\,Ei.(pq) - e^{pq}\,Ei.(-pq)\right]\\
&\int_0^\infty \frac{q\,Sin.px.Cos.nsx\,dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{4}\left[e^{-(p+ns)q}\,Ei.\{q(p+ns)\} - e^{(p+ns)q}\,Ei.\{-q(p+ns)\}\right]+\\
&\qquad + \frac{1}{4}\left[e^{-(p-ns)q}\,Ei.\{q(p-ns)\} - e^{(p-ns)q}\,Ei.\{-q(p-ns)\}\right]\\
&\qquad = \frac{1}{4}e^{-pq}\left[e^{nsq}\,Ei.\{q(p-ns)\} + e^{-nsq}\,Ei.\{q(p+ns)\}\right]-\\
&\qquad - \frac{1}{4}e^{pq}\left[e^{nsq}\,Ei.\{-q(p+ns)\} + e^{-nsq}\,Ei.\{-q(p-ns)\}\right]\\
&\int_0^\infty \frac{q\,Sin.px.Sin.nsx\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-(p-ns)q} - \frac{\pi}{4}e^{-(p+ns)q} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}(e^{nsq}-e^{-nsq})\,,\ ns<p;\\
&\qquad = \frac{\pi}{4}e^{-(ns-p)q} - \frac{\pi}{4}e^{-(ns+p)q} = \frac{\pi}{4}(e^{pq}-e^{-pq})\,e^{-nsq}\,,\ ns>p;\\
&\qquad = \frac{\pi}{4}(1-e^{-2pq}) \qquad\qquad ,\ ns=p;\\
&\int_0^\infty \frac{q\,Cos.px\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-pq}\\
&\int_0^\infty \frac{q\,Cos.px.Cos.nsx\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-(p-ns)q} + \frac{\pi}{4}e^{-(p+ns)q} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}(e^{nsq}+e^{-nsq})\,,\ ns<p;
\end{aligned}\right\}(h)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{q\,Cos.px.Cos.nsx\,dx}{q^2+x^2} &= \frac{\pi}{4}e^{-(ns-p)q} + \frac{\pi}{4}e^{-(ns+p)q} = \frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\,e^{-nsq}, \quad ns > p; \\
&= \frac{\pi}{4}(1+e^{-2pq}) \qquad\qquad , ns = p; \\
\int_0^\infty \frac{q\,Cos.px.Sin.nsx\,dx}{q^2+x^2} &= \frac{1}{4}\left[e^{-(p+ns)q}\,Ei.\{q(p+ns)\} - e^{(p+ns)q}\,Ei.\{-q(p+ns)\}\right] - \\
&- \frac{1}{4}\left[e^{-(p-ns)q}\,Ei.\{q(p-ns)\} - e^{(p-ns)q}\,Ei.\{-q(p-ns)\}\right] \\
&= -\frac{1}{4}e^{-pq}\left[e^{nsq}\,Ei.\{q(p-ns)\} - e^{-nsq}\,Ei.\{q(p+ns)\}\right] - \\
&- \frac{1}{4}e^{pq}\left[e^{nsq}\,Ei.\{-q(p+ns)\} - e^{-nsq}\,Ei.\{-q(p-ns)\}\right]
\end{aligned}\right\}\ (h)$$

Dans le cas, que $\frac{p}{s}$ est un nombre entier, c'est-à-dire que p est égal à ns, il se trouve auprès de la sommation pour cette valeur de $n = \frac{p}{s}$ un terme, qui dépend de la troisième valeur pour la troisième et la cinquième des intégrales (h); mais quand on met chaque fois $ns = p$ dans les deux premières valeurs pour les mêmes intégrales (pour ns moindre et plus grand que p), l'on retrouve des résultats tout-à-fait égaux à cette troisième valeur. Donc on n'a pas besoin de tenir un compte à part de ce terme, mais on peut l'admettre soit dans la sommation pour ns plus petit que p, soit dans celle, où ns est plus grand que p.

Il suffit donc de ces formules (h) pour décider de ce que les formules générales (A) et (B) deviennent, lorsqu'on y prend successivement $\frac{q\,Sin.px}{q^2+x^2}$ et $\frac{q\,Cos.px}{q^2+x^2}$ pour $f(x)$. On obtient alors:

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{q\,Sin.px\,dx}{q^2+x^2} &= \frac{1}{4}e^{-pq}\sum_0^c A_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{q(p-ns)\} + e^{-nsq}\,Ei.\{q(p+ns)\}\right] \\
&- \frac{1}{4}e^{pq}\sum_0^c A_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{-q(p+ns)\} + e^{-nsq}\,Ei.\{-q(p-ns)\}\right] \ . \ (G)
\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{q\,Sin.px\,dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^c B_n(e^{nsq}-e^{-nsq}) \qquad , p \geq cs; \ . \ (H_1)$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x) \frac{q \, Sin. \, p x \, d x}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_1^d B_n (e^{nsq} - e^{-nsq}) + \frac{\pi}{4} (e^{pq} - e^{-pq}) \sum_{d+1}^c B_n e^{-nsq}$$
$$= \frac{\pi}{4} (e^{pq} - e^{-pq}) \sum_0^c B_n e^{-nsq} - \frac{\pi}{4} e^{pq} \sum_0^d B_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^d B_n e^{nsq} \quad \left\{ \begin{array}{l} p = ds + p', \\ p' < s, \\ d < c; \; . \; . \; (H_2) \end{array} \right.$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x) \frac{q \, Cos. \, p x \, d x}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^c A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) \qquad , p \geqq cs; \; . \; (I_1)$$

$$= \frac{\pi}{2} e^{-pq} + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_1^d A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) + \frac{\pi}{4} (e^{pq} + e^{-pq}) \sum_{d+1}^c A_n e^{-nsq}$$
$$= \frac{\pi}{4} (e^{pq} + e^{-pq}) \sum_0^c A_n e^{-nsq} - \frac{\pi}{4} e^{pq} \sum_0^d A_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^d A_n e^{nsq} \quad \left\{ \begin{array}{l} p = ds + p', \\ p' < s, \\ d < c; \; . \; (I_2) \end{array} \right.$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x) \frac{q \, Cos. \, p x \, d x}{q^2 + x^2} = -\frac{1}{4} e^{-pq} \sum_0^c B_n \left[e^{nsq} \, Ei. \{ q(p - ns) \} - e^{-nsq} \, Ei. \{ q(p + ns) \} \right]$$
$$- \frac{1}{4} e^{pq} \sum_0^c B_n \left[e^{nsq} \, Ei. \{ -q(p + ns) \} - e^{-nsq} \, Ei. \{ -q(p - ns) \} \right] . \; . \; (K)$$

L'on doit remarquer ici à l'égard de la transformation des sommations précédentes, que dans la formule (G) le premier terme, qui est fourni par l'équation générale (A), c'est-à-dire

$$\tfrac{1}{2} A_0 \left[e^{-pq} \, Ei. (pq) - e^{pq} \, Ei. (-pq) \right]$$

se trouve être la même chose, que ce qui provient des deux sommations, lorsqu'on y prend n égal à zéro: donc, puisque ces sommations étaient prises depuis 1 jusques à c, il faut les prendre de o à c, pour y admettre le terme mentionné. De même dans la formule (K) on a pris les sommations depuis o jusques à c, au lieu de les prendre de 1 à c, parceque pour la valeur zéro de n les deux termes s'évanouissent séparément, et que par suite ce changement de limites ne change en rien la valeur de l'intégrale elle-même. Dans l'équation (I_1) on a admis le premier terme, qui provient de l'équation générale (A), c'est-à-dire $\frac{\pi}{2} e^{-pq}$, dans la sommation, qui commence alors avec la valeur zéro de n au lieu de l'unité, tout comme il a été justifié à l'occasion de la formule (G): dans (H_1) au contraire, par la même raison que dans la formule (K), on a changé la limite inférieure de la sommation, l'unité, dans zéro. Dans la formule (H_2) la sommation de $d + 1$ à c est réduite à la différence de deux autres sommations, l'une depuis o jusques à c, l'autre de o à d; et de même dans l'équation (I_2). Mais en outre dans cette dernière (I_2)

on a pris pour l'autre sommation depuis 1 jusques à d, une autre de o à d, et cela pour y admettre le premier terme détaché $\frac{\pi}{2}\, e^{-pq}$, qui est fourni par l'équation générale (A), et qui coincide avec la fonction à sommer, lorsqu'on y prend le zéro pour n: tandis que dans la formule (H_2) la sommation de 1 à d est encore changée dans une autre de o à d, puisque le terme ajouté de la sorte pour la valeur zéro de n est nul lui-même, de sorte qu'il ne change rien au résultat.

Il s'ensuit que toutes les sommations commencent à présent avec zéro; cela a été effectué, d'une part afin d'avoir des formules d'une forme semblable, d'autre part puisqu'alors les sommations elles-mêmes deviennent en général plus faciles dans les cas spéciaux.

4. Passons aux substitutions analogues

$$f(x) = \frac{x\, Sin.\, p\, x}{q^2 + x^2} \text{ et } f(x) = \frac{x\, Cos.\, p\, x}{q^2 + x^2};$$

alors on trouve par l'intermédiaire des formules (b):

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{2}\, e^{-pq}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.\, p\, x.\, Cos.\, n\, s\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{x\, d\, x}{q^2 + x^2}\; \frac{Sin.\, \{(p + n\, s)\, x\} + Sin.\, \{(p - n\, s)\, x\}}{2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x\, d\, x}{q^2 + x^2}\; \frac{Sin.\, \{(n\, s + p)\, x\} - Sin\, \{(n\, s - p)\, x\}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.\, p\, x.\, Sin.\, n\, s\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{x\, d\, x}{q^2 + x^2}\; \frac{Cos.\, \{(p - n\, s)\, x\} - Cos.\, \{(p + n\, s)\, x\}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.\, p\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} = -\frac{1}{2}\, \{e^{pq}\, Ei.\, (-p\, q) + e^{-pq}\, Ei.\, (p\, q)\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.\, p\, x.\, Cos.\, n\, s\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{x\, d\, x}{q^2 + x^2}\; \frac{Cos.\, \{(p - n\, s)\, x\} + Cos.\, \{(p + n\, s)\, x\}}{2}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.\, p\, x.\, Sin.\, n\, s\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} = \int_0^\infty \frac{x\, d\, x}{q^2 + x^2}\; \frac{Sin.\, \{(p + n\, s)\, x\} - Sin.\, \{(p - n\, s)\, x\}}{2} =$$

$$= \int_0^\infty \frac{x\, d\, x}{q^2 + x^2}\; \frac{Sin.\, \{(n\, s + p)\, x\} + Sin.\, \{(n\, s - p)\, x\}}{2}$$

Ces équations donnent lieu aux mêmes observations que les équations du paragraphe précédent, en tant au moins qu'il s'y présente un produit de fonc-

tions circulaires directes comme facteur sous le signe d'intégration; ce produit est déjà décomposé dans une somme ou une différence de fonctions semblables, d'après les règles connues de la Goniométrie. Mais ici la valeur correspondante de l'intégrale, qui se trouve parmi les formules (d) donne lieu à l'équation

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.(-rx)\, dx}{q^2+x^2} = -\frac{1}{2}\left[e^{-qr} Ei.(qr) + e^{qr} Ei.(-qr)\right] = \int_0^\infty \frac{x\, Cos.(+rx)\, dx}{q^2+x^2}$$

de sorte que l'on n'a pas besoin auprès de la troisième et de la cinquième des formules précédentes d'observer si $p - ns$ soit positif ou bien négatif. Ceci ne vaut plus à l'égard de la deuxième et sixième de ces intégrales; car dans la transformation de ces formules on a l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\{(p-ns)\}\, x\, dx}{q^2+x^2} \quad \text{ou} \quad -\int_0^\infty \frac{Sin.\{(ns-p)\}\, x\, dx}{q^2+x^2},$$

et ici l'on doit prendre la première ou la seconde forme, selon que p est plus grand ou plus petit que ns, afin que le coefficient de x sous le signe *Sinus* reste constamment positif, comme il est de rigueur: la valeur de ces deux intégrales devient donc respectivement

$$\frac{\pi}{2} e^{-(p-ns)q} \quad \text{et} \quad -\frac{\pi}{2} e^{-(ns-p)q}.$$

Si l'on a égard à ces observations, on acquiert à l'aide des intégrales (d) les formules suivantes

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x\, Sin.\, px\, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2} e^{-pq} \\
&\int_0^\infty \frac{x\, Sin\, px. Cos.nsx\, dx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4} e^{-(p+ns)q} + \frac{\pi}{4} e^{-(p-ns)q} = \frac{\pi}{4} e^{-pq}\left(e^{nsq} + e^{-nsq}\right),\ ns < p; \\
&\qquad = \frac{\pi}{4} e^{-(ns+p)q} - \frac{\pi}{4} e^{-(ns-p)q} = \frac{\pi}{4}\left(e^{-pq} - e^{pq}\right) e^{-nsq},\ ns > p; \\
&\int_0^\infty \frac{x\, Sin.px. Sin.nsx\, dx}{q^2+x^2} = -\frac{1}{4}\left[e^{(p-ns)q} Ei.\{-q(p-ns)\} + e^{-(p-ns)q} Ei.\{q(p-ns)\}\right] \\
&\qquad + \frac{1}{4}\left[e^{(p+ns)q} Ei.\{-q(p+ns)\} + e^{-(p+ns)q} Ei.\{q(p+ns)\}\right] \\
&\qquad = \frac{1}{4} e^{pq}\left[e^{nsq} Ei.\{-q(p+ns)\} - e^{-nsq} Ei.\{-q(p-ns)\}\right] \\
&\qquad - \frac{1}{4} e^{-pq}\left[e^{nsq} Ei.\{q(p-ns)\} - e^{-nsq} Ei.\{q(p+ns)\}\right]
\end{aligned}\right\} (i)$$

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} &= -\frac{1}{2}\left\{e^{pq}\,Ei.(-p\,q)+e^{-pq}\,Ei.(p\,q)\right\}\\
\int_0^\infty \frac{x\,Cos.\,p\,x.\,Cos.\,n\,s\,x\,d\,x}{q^2+x^2} &= -\frac{1}{4}\left[e^{(p-ns)q}\,Ei.\{-q\,(p-n\,s)\}-e^{-(p-ns)q}\,Ei.\{q\,(p-n\,s)\}\right]\\
&\quad -\frac{1}{4}\left[e^{(p+ns)q}\,Ei.\{-q\,(p+ns)\}+e^{-(p+ns)q}\,Ei.\{q\,(p+n\,s)\}\right]\\
&= -\frac{1}{4}e^{pq}\left[e^{nsq}\,Ei.\{-q\,(p+n\,s)\}-e^{-nsq}\,Ei.\{-q\,(p-n\,s)\}\right]\\
&\quad -\frac{1}{4}e^{-pq}\left[e^{nsq}\,Ei.\{q\,(p-n\,s)\}-e^{-nsq}\,Fi.\{q\,(p+n\,s)\}\right]\\
\int_0^\infty \frac{x\,Cos.\,p\,x.\,Sin.\,n\,s\,x\,d\,x}{q^2+x^2} &= \frac{\pi}{4}e^{-(p+ns)q}-\frac{\pi}{4}e^{-(p-ns)q} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}\left(e^{-nsq}-e^{nsq}\right),\ n\,s>p;\\
&= \frac{\pi}{4}e^{-(ns+p)q}+\frac{\pi}{4}e^{-(ns-p)q} = \frac{\pi}{4}\left(e^{pq}+e^{-pq}\right)e^{-nsq},\ n\,s<p;
\end{aligned}\right\}(i)$$

Voilà les formules nécessaires pour les suppositions $f(x)=\frac{x\,Sin.\,p\,x}{q^2+x^2}$ ou $f(x)=\frac{x\,Cos.\,p\,x}{q^2+x^2}$ dans les équations générales (A) et (B). Seulement il faut faire attention en employant les deux valeurs de la deuxième et sixième de ces formules (i); car dans les sommations, qui se trouvent dans les formules (A) et (B) l'argument n commence à l'unité et parcourt ensuite la série des nombres naturels jusques à c; donc il faut avoir recours aux premières seulement des valeurs correspondantes, autant que cs est plus petit que p; tandis que pour cs plus grand que p, de sorte que l'on ait $p=d\,s+p'$, $p'<s$, $d<c$, l'on doit décomposer les sommations dans deux autres, dont l'une parcourt la suite des nombres naturels depuis l'unité jusques à d, la seconde de $d+1$ à c; pour ces deux sommations les deux valeurs des intégrales correspondantes des formules (i) valent donc respectivement.

Il se peut encore, que p soit exactement un multiple de s, c'est-à-dire égal à $d\,s$ (où donc p' est zéro); alors, pour $n=d$, on a une autre forme pour les intégrales en question, qui deviennent pour ce cas spécial:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x\,Sin\,p\,x.\,Cos.\,n\,s\,x\,d\,x}{q^2+x^2} &= \int_0^\infty \frac{x\,Sin.\,p\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x\,Sin.\,2\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-2pq}\\
\int_0^\infty \frac{x\,Cos\,p\,x.\,Sin.\,n\,s\,x\,d\,x}{q^2+x^2} &= \int_0^\infty \frac{x\,Cos.\,p\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{x\,Sin.\,2\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{2}e^{-2pq}
\end{aligned}\right\},\ n\,s=p: \quad \ldots\ (k)$$

Dans ce cas-ci cette valeur pour $ns = p$ diffère essentiellement des deux autres valeurs, que fourniraient les équations (i) (pour les cas de ns plus petit ou plus grand que p) et qui seraient ici

$$\frac{\pi}{4}(1 + e^{-2pq}) \text{ et } \frac{\pi}{4}(1 - e^{-2pq});$$

de sorte que le cas actuel ne peut se déduire aucunement des deux autres, comme il arrivait précédemment. Il n'est donc pas permis ici, d'admettre le terme correspondant à la valeur $\frac{p}{s}$ de n dans l'une ou l'autre des deux sommations, où ns reste constamment moindre ou plus grand que p, mais on se trouve obligé de tenir compte de ce terme à part. Ici donc premièrement l'on doit sommer la première fonction, qui se trouve dans les équations correspondantes (i), de $n = 1$ jusques à $n = d - 1$, ensuite vienne un terme pour $ns = d$, tiré des formules (k), et enfin pour la seconde sommation depuis $d + 1$ à c, il faut avoir recours à la seconde valeur dans les formules (i).

Encore si p était exactement égal à cs, il faudrait prendre la sommation de $n = 1$ jusques à $n = c - 1$ à l'égard des premières valeurs, qui se trouvent dans les équations (i), et ajouter ensuite pour $n = c$ la valeur, qui est fournie par la formule (k).

A présent les équations générales (A) et (B) nous donnent, lorsqu'on a égard à toutes les observations précédentes, les formules:

$$\int_0^\infty \varphi_1(x) \frac{x \operatorname{Sin} px\, dx}{q^2 + x^2} = \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^c A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) \qquad , p > cs; \ldots (\mathrm{I}_1)$$

$$= \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^{c-1} A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) + \frac{\pi}{4} A_c e^{-2pq} \qquad , p = cs; \ldots (\mathrm{I}_2)$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} e^{-pq} A_0 + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_1^d A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) + \frac{\pi}{4}(e^{-pq} - e^{pq}) \sum_{d+1}^c A_n e^{-nsq} \\ &= \frac{\pi}{4}(e^{-pq} - e^{pq}) \sum_0^c A_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{pq} \sum_0^d A_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^d A_n e^{nsq} \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &, p = ds + p', \\ &p' < s, d < c; \\ &\ldots\ldots\ldots (\mathrm{I}_3) \end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned} &= \frac{\pi}{2} e^{-pq} A_0 + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_1^{d-1} A_n (e^{nsq} + e^{-nsq}) + \frac{\pi}{4} A_d e^{-2pq} + \frac{\pi}{4}(e^{-pq} - e^{pq}) \sum_{d+1}^c A_n e^{-nsq} \\ &= \frac{\pi}{4}(e^{-pq} - e^{pq}) \sum_0^c A_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{pq} \sum_0^{d-1} A_n e^{-nsq} + \frac{\pi}{4} e^{-pq} \sum_0^{d-1} A_n e^{nsq} + \frac{\pi}{4} A_d \end{aligned}\right\} \begin{aligned} &, p = ds, \\ &d < c; \\ &\ldots (\mathrm{I}_4) \end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{1}{4}e^{pq}\sum_0^c B_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{-q(p+ns)\}-e^{-nsq}\,Ei.\{-q(p-ns)\}\right]$$

$$-\frac{1}{4}e^{-pq}\sum_0^c B_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{q(p-ns)\}-e^{-nsq}\,Ei.\{q(p+ns)\}\right] \quad (M)$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,Cos.p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = -\frac{1}{4}e^{pq}\sum_0^c A_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{-q(p+ns)\}+e^{-nsq}Ei.\{-q(p-ns)\}\right]$$

$$-\frac{1}{4}e^{-pq}\sum_0^c A_n\left[e^{nsq}\,Ei.\{q(p-ns)\}+e^{-nsq}\,Ei.\{q(p+ns)\}\right] \quad (N)$$

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Cos.p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^c B_n(e^{-nsq}-e^{nsq}) \qquad ,p>cs;\ (O_1)$$

$$=\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^{c-1} B_n(e^{-nsq}-e^{nsq})+\frac{\pi}{4}B_c\,e^{-2pq} \qquad ,p=cs;\ (O_2)$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_1^d B_n(e^{-nsq}-e^{nsq})+\frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_{d+1}^c B_n\,e^{-nsq}\\&=\frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^c B_n\,e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{pq}\sum_0^d B_n\,e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^d B_n\,e^{nsq}\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p=ds+p',\\&p'<s, d<c;\\&\dots\dots\dots (O_3)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&=\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_1^{d-1} B_n(e^{-nsq}-e^{nsq})+\frac{\pi}{4}B_d\,e^{-2pq}+\frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_{d+1}^c B_n\,e^{-nsq}\\&=\frac{\pi}{4}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^c B_n e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{pq}\sum_0^{d-1} B_n\,e^{-nsq}-\frac{\pi}{4}e^{-pq}\sum_0^{d-1} B_n e^{nsq}-\frac{\pi}{4}B_d\end{aligned}\right\}\begin{aligned}&,p=ds,\\&d<c;\\&\dots\dots (O_4)\end{aligned}$$

Dans ces formules les sommations ont subi diverses transformations afin de rendre le zéro leur point de départ commun. Dans les équations (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) et (N) le premier terme détaché, qui est fourni par l'équation générale (A), et qui est respectivement

$$\frac{\pi}{4}A_0\,e^{-pq} \text{ et } -\frac{1}{2}A_0\left[e^{pq}\,Ei.(-pq)+e^{-pq}\,Ei.(pq)\right]$$

peut être censé comme étant produit par la valeur que prennent, lorsque n devient égal à zéro, la sommation dans les formules (L_1), (L_2), (L_3), (L_4) et les deux sommations de l'équation (N), et dès-lors il est admis dans ces sommations en les faisant commencer à la limite inférieure zéro au lieu de la limite l'unité. Dans les formules (M), (O_1) et (O_2) et dans les premiers termes des formules (O_3), (O_4) au lieu de l'unité le zéro est pris pour limite inférieure

de la sommation, puisque le terme à ajouter respectivement pour n égal à zéro est identiquement nul, et n'a donc aucune influence sur la valeur de l'intégrale. De plus, dans les équations (L_3), (O_3) les sommations qui s'étendent de $d+1$ jusques à c ont été décomposées dans la différence de deux autres, qui vont respectivement depuis o à c et depuis o à d; tandis que dans les formules (L_4), (O_4) ces mêmes sommations de $d+1$ à c sont réduites à trois parties, savoir une sommation de o à c, à laquelle il faut soustraire une autre sommation de o à $d-1$, et puis encore le terme correspondant à la valeur d de n. La nécessité d'une telle division dans le cas actuel, n'a plus besoin de preuve, après ce qui a été observé à ce sujet dans les discutions précédentes.

Enfin à l'égard de ces mêmes formules (L_4), (O_4) indiquons que ce terme détaché, qui est respectivement $\frac{\pi}{4} A_d$ ou $-\frac{\pi}{4} B_d$ peut être accueilli dans chaque sommation sans distinction, pourvu que l'on étende la sommation respective de zéro à d, au lieu de la prendre depuis zéro jusques à $d-1$.

5. Ces vingt-trois formules (A) à (O_4) constituent autant de théorèmes différents à l'aide desquels le problème concernant la réduction de cette classe d'intégrales définies est complétement résolu, et par lesquels il est subvenu convenablement aux divers cas qui peuvent s'offrir auprès des suppositions speciales. Mais ces cas, comme il arrive aisément, ont été bien des fois perdus de vue, quoiqu'ici pourtant les résultats différents entre eux nous l'apprennent, qu'en général il faut bien discerner ces cas divers, bienqu'il puisse arriver aussi qu'une telle distinction exacte des cas spéciaux n'ait pas toujours d'influence; de cette dernière observation les formules précédentes (C) à (G), (K) (M) et (N) témoignent par éxemple.

Les théorèmes trouvés sont donc très-propres pour l'évaluation des intégrales définies qui sont tellement constituées qu'elles peuvent se réduire à quelqu'une des formes précédentes.

II. APPLICATION DE CES THÉORÈMES LORSQU'ON PREND $Cos.^a x$, $x\,Cos.^a x$, $Sin.^a x$, $x\,Sin.^a x$ POUR $F(x)$.

6. Nous appliquerons à présent les théorèmes trouvés à l'étude des intégrales définies mentionnées, c'est-à-dire où $F(x)$ est de la forme très-simple, $Cos.^a x$, $x\,Cos.^a x$, $Sin.^a x$, $x\,Sin.^a x$. A cet effet nous poserons en premier lieu:

$$\left.\begin{aligned}\varphi_1(x) &= Cos.^a x.\, Cos.\, a x = 2^{-a}\left\{1+\sum_1^a \binom{a}{n} Cos.\, 2nx\right\}\\ \varphi_2(x) &= Cos.^a x.\, Sin.\, a x = 2^{-a}\sum_1^a \binom{a}{n} Sin.\, 2nx\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ (l)$$

où $\binom{a}{n}$ est la dénotation connue du n ième coefficient du binôme élevé à la puissance a ième. Puisque c est égal ici à a et que donc il reste fini, toutes les séries dans (a), (A) et (B) et dans les formules, que l'on en a déduites, sont finies aussi, et il n'y a pas lieu d'instituer une recherche particulière à l'égard de la convergence de ces séries. En employant les équations générales (A) et (B) on voit de suite que

$$s = 2\,,\ A_n = B_n = 2^{-a}\binom{a}{n}\,,\ A_0 = 2^{-a};$$

et dès-lors les formules (C), (D), (E), (E_1), et (F) donnent, lorsqu'on prend

$$\varphi'_1(x) = Cos.^{a-1} x.\, Cos.\,\{(a-1)x\}$$

dans l'équation (E_1):

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Cos.\, a x\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a}\frac{\pi}{2q}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} = \frac{\pi}{q}2^{-a-1}(1+e^{-2q})^a \ldots\ldots\ (1)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, a x\, dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q}\sum_1^a \binom{a}{n}\{e^{-2nq} Ei.(2nq) - e^{2nq} Ei.(-2nq)\}\ \ldots\ (2)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Cos.\, a x}{q^2+x^2}\, x\, dx = \infty \ldots\ldots\ (3)$$

$$\int_0^\infty \frac{2\,Cos.^a x.\, Cos.\, a x - Cos.^{a-1} x.\, Cos.\,\{(a-1)x\}}{q^2+x^2}\, x\, dx = -2^{-a}\sum_1^a \binom{a}{n}\{e^{2nq} Ei.(-2nq) +$$

$$+ e^{-2qn} Ei.(2nq)\} + 2^{-a}\sum_1^{a-1}\binom{a-1}{n}\left\{\begin{matrix} e^{2nq} Ei.(-2nq)\\ + e^{-2nq} Ei.(2nq)\end{matrix}\right\}\ (4)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, a x}{q^2+x^2}\, x\, dx = 2^{-a}\frac{\pi}{2}\sum_1^a \binom{a}{n} e^{-2nq} = 2^{-a-1}\pi\{-1+(1+e^{-2q})^a\}\ \ldots\ (5)$$

La formule (4) peut être réduite à une forme plus simple: car on a premièrement

$$2\,Cos.^a x.\, Cos.\, a x - Cos.^{a-1} x.\, Cos.\,\{(a-1)x\} = Cos.^{a-1} x.\, Cos.\,\{(a+1)x\},$$

et encore

$$\binom{a}{n} - \binom{a-1}{n} = \binom{a-1}{n-1};$$

de sorte qu'on obtient:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{a-1} x . Cos. \{(a+1)x\}}{q^2+x^2} . x dx = -2^{-a} \{e^{2aq} Ei.(-2aq) + e^{-2aq} Ei.(2aq)\}$$

$$-2^{-a} \sum_1^{a-1} \binom{a-1}{n-1} \{e^{2nq} Ei.(-2nq) + e^{-2nq} Ei(2nq)\} \quad . . (6)$$

L'emploi de la formule goniométrique précédente auprès de l'intégrale (1) donne encore:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{a-1} x . Cos. \{(a+1)x\} dx}{q^2+x^2} = 2^{-a+1} \frac{\pi}{2q} (1+e^{-2q})^a - 2^{-a+1} \frac{\pi}{2q} (1+e^{-2q})^{a-1}$$

$$= 2^{-a} \frac{\pi}{q} e^{-2q} (1+e^{-2q})^{a-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (7)$$

De même l'on a

$$Cos.^{a-1} x . Sin. \{(a+1)x\} = 2 Cos.^a . Sin. ax - Cos.^{a-1} x . Sin. \{(a-1)x\};$$

et les formules (2) et (5) donnent à l'aide de cette formule de réduction:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{a-1} x . Sin. \{(a+1)x\} dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a}}{q} \sum_1^a \binom{a}{n} \{e^{-2nq} Ei.(2nq) - e^{2nq} Ei.(-2nq)\}$$

$$- \frac{2^{-a}}{q} \sum_1^{a-1} \binom{a-1}{n} \{e^{-2nq} Ei.(2nq) - e^{2nq} Ei.(-2nq)\}$$

$$= \frac{2^{-a}}{q} \{e^{-2aq} Ei.(2aq) - e^{2aq} Ei.(-2aq)\} + \frac{2^{-a}}{q} \sum_1^{a-1} \binom{a-1}{n-1} \{e^{-2nq} Ei.(2nq) - e^{2nq} Ei.(-2nq)\} . (8)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{a-1} x . Sin. \{(a+1)x\}}{q^2+x^2} x dx = 2^{-a} \pi \{-1 + (1+e^{-2q})^a\} - 2^{-a+1} \frac{\pi}{2} \{-1 + (1+e^{-2q})^{a-1}\}$$

$$= 2^{-a} \pi e^{-2q} (1+e^{-2q})^{a-1} \ldots\ldots\ldots\ldots (9)$$

7. Lorsqu'on substitue les fonctions $\varphi_1(x)$ en $\varphi_2(x)$ des équations (l) dans les formules (G) jusques à (K), ces substitutions donnent lieu successivement aux formules suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x . Cos. ax . Sin. px dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-2}}{q} e^{-pq} \sum_0^a \binom{a}{n} [e^{2nq} Ei. \{q(p-2n)\} + e^{-2nq} Ei. \{q(p+2n)\}]$$

$$- \frac{2^{-a-2}}{q} e^{pq} \sum_0^a \binom{a}{n} [e^{2nq} Ei. \{-q(p+2n)\} + e^{-2nq} Ei. \{-q(p-2n)\}] . (10)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\,Sin.\,a\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{-pq}\sum_0^a \binom{a}{n}(e^{2nq}-e^{-2nq})$$

$$= 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\{(1+e^{2q})^a-(1+e^{-2q})^a\} = 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}(e^{2aq}-1)(1+e^{-2q})^a \quad ,p\geqq 2a; \quad \ldots (11)$$

$$= 2^{-a}\frac{\pi}{4q}(e^{pq}-e^{-pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}$$

$$=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^{pq}-e^{-pq})(1+e^{-2q})^a-2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq} \quad ,p=2d+p', \; p'<2, d<a; \quad \ldots (12)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\,Cos.\,a\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq})$$

$$=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\{(1+e^{2q})^a+(1+e^{-2q})^a\} = 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}(e^{2aq}+1)(1+e^{-2q})^a \quad ,p\geqq 2a; \quad \ldots (13)$$

$$=2^{-a}\frac{\pi}{4q}(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a}\frac{\pi}{4q}e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}$$

$$=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^{pq}+e^{-pq})(1+e^{-2q})^a-2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq} \quad ,p=2d+p', \; p'<2, d<a; \quad \ldots (14)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x\,Sin.ax.Cos.pxdx}{q^2+x^2} = -\frac{2^{-a-2}}{q}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\}-e^{-2nq}Ei\,\{q(p+2n)\}\right]$$

$$-\frac{2^{-a-2}}{q}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\}-e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\}\right]. \quad (15)$$

En prenant la somme et la différence de (15) et de (10) on obtient:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\,Sin.\,\{(a+p)\,x\}\,d\,x}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}\,Ei.\,\{q(p+2n)\} -$$

$$-\frac{2^{-a-1}}{q}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{2nq}\,Ei.\,\{-q(p+2n)\}$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\,Sin.\,\{(a-p)\,x\}\,d\,x}{q^2+x^2} = -\frac{2^{-a-1}}{q}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{2nq}\,Ei.\,\{q(p-2n)\} +$$

$$+\frac{2^{-a-1}}{q}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}\,Ei.\{-q(p-2n)\}$$

Il s'ensuit de la seconde expression, que la première vaut encore pour une valeur négative de p. Prenons donc dans cette intégrale $a+p=r$, $p=r-a$,

alors on a pour chaque valeur positive de r (la valeur a exceptée), puisque p est tout-à-fait arbitraire pourvu qu'il soit plus grand que zéro:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x . Sin. r x d x}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^{(a-r)q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(r-a+2n)\}$$
$$- \frac{2^{-a-1}}{q} e^{(r-a)q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq} Ei. \{q(a-r-2n)\} \quad \ldots\ldots\ldots (16)$$

Lorsqu'on suppose ici successivement $r = 2a$ et $r = 3a$, on a

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x . Sin. 2 a x d x}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^{-aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(a+2n)\}$$
$$- \frac{2^{-a-1}}{q} e^{aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq} Ei. \{-q(a+2n)\} \ldots\ldots\ldots (17)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x . Sin. 3 a x d x}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^{-2aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} Ei. \{2q(a+n)\}$$
$$- \frac{2^{-a-1}}{q} e^{2aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq} Ei. \{-2q(a+n)\} \ldots\ldots\ldots (18)$$

Quand on prend aussi la somme et la différence des formules (13) et (11), et de même des formules (14) et (12), il vient:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{Cos.^a x . Cos. \{(a+p)x\} dx}{q^2+x^2} &= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{-pq}(1+e^{-2q})^a \qquad , p \geqq 2a;\\
&= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{-pq}(1+e^{-2q})^a \qquad , p = 2d+p', \; p'<2, d<a.\\
\int_0^\infty \frac{Cos.^a x . Cos. \{(a-p)x\} dx}{q^2+x^2} &= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{-pq} e^{2aq}(1+e^{-2q})^a \\
&= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{(2a-p)q}(1+e^{-2q})^a \qquad \Big\}, p \geqq 2a;\\
&= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{pq}(1+e^{-2q})^a - 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{pq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq}\\
&\quad + 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^{-pq}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} \qquad \Big\}, p=2d+p', \; p'<2, d<a;
\end{aligned}\right\} \ldots (m)$$

La première et troisième de ces équations donnent pour $p = 2a$ — car pour cette valeur de p elles seules valent, tandis que les autres ne permettent pas une telle supposition —

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. 3\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-2aq}(1+e^{-2q})^a \dots\dots\dots\dots (19)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos.\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(1+e^{-2q})^a.$$

On a déjà trouvé cette dernière formule, dans nos recherches antérieures, form. (1).

Pour $p=a$ au contraire les deuxième et quatrième des formules (m) valent seulement avec exclusion des autres valeurs. On a directement

pour $2\,d=a$, et $p'=0$,

ou $2\,d=a-1$, et $p'=1$:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. 2\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-aq}(1+e^{-2q})^a \dots\dots\dots\dots (20)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. d\, x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{aq}(1+e^{-2q})^a - 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{aq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq} + 2^{a-1}\frac{\pi}{q}e^{-aq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}.$$

Mais puisque toujours $\binom{a}{n} = \binom{a}{a-n}$ on a ici:

$$e^{-aq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq} = e^{aq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-(a-n)2q} = e^{aq}\sum_a^{a-d}\binom{a}{a-n}e^{-2nq} = e^{aq}\sum_a^{a-d}\binom{a}{n}e^{-2nq}$$

et

$$-e^{aq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq} = -e^{aq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq} + e^{aq}\sum_{d+1}^a\binom{a}{n}e^{-2nq} = -e^{aq}(1+e^{-2q})^a + e^{aq}\sum_{d+1}^a\binom{a}{n}e^{-2nq}.$$

et donc aussi:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x\, d\, x}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{aq}\left\{\sum_{d+1}^a\binom{a}{n}e^{-2nq} + \sum_{a-d}^a\binom{a}{n}e^{-2nq}\right\}.$$

Si l'on a à présent $2\,d=a$, ou $2\,d=a-1$, il s'ensuit respectivement:

$$\sum_{d+1}^a\binom{a}{n}e^{-2nq} + \sum_{a-d}^a\binom{a}{n}e^{-2nq} = \sum_{d+1}^{2d}\binom{a}{n}e^{-2nq} + \sum_d^{2d}\binom{a}{n}e^{-2nq} = \binom{a}{d}e^{-2dq} + 2\sum_{d+1}^{2d}\binom{a}{n}e^{-2nq},$$

$$\text{ou } = \sum_{d+1}^{2d+1}\binom{a}{n}e^{-2nq} + \sum_{d+1}^{2d+1}\binom{a}{n}e^{-2nq} = 2\sum_{d+1}^{2d+1}\binom{a}{n}e^{-2nq}.$$

Les résultats diffèrent donc essentiellement, selon que $2\,d$ est égal à a ou à $a+1$, d'où $a=2\,d$ ou $a=2\,d+1$, c'est-à-dire selon que a est pair ou impair; on a donc dans ces deux cas:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a} x\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}e^{2aq}\left\{\binom{2a}{a}e^{-2aq}+2\sum_{a+1}^{2a}\binom{2a}{n}e^{-2nq}\right\}$$

$$= 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\binom{2a}{a}+2^{-2a}\frac{\pi}{q}e^{2aq}\sum_{a+1}^{2a}\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$

$$= 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\binom{2a}{a}+2^{-2a}\frac{\pi}{q}\sum_{a+1}^{2a}\binom{2a}{n}e^{-2(n-a)q}$$

$$= 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\binom{2a}{a}+2^{-2a}\frac{\pi}{q}\sum_{1}^{a}\binom{2a}{n+a}e^{-2nq} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (21)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a-1} x\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}e^{(2a-1)q}\,2\sum_{a}^{2a-1}\binom{2a-1}{n}e^{-2nq}$$

$$= 2^{-2a+1}\frac{\pi}{q}\sum_{a}^{2a-1}\binom{2a-1}{n}e^{-(2n-2a+1)q} = 2^{-2a+1}\frac{\pi}{q}\sum_{0}^{a-1}\binom{2a-1}{n+a}e^{-(2n+1)q} \;. \quad (22)$$

Ensuite les deux premières des équations (m) nous apprennent, que pour $a+p=r$ la valeur de l'intégrale ne change pas pour chaque r, qui soit plus grand que a: tandis que la dernière de ces mêmes équations pour $a-p=r$ nous fournit la valeur de l'intégrale aussi-longtemps que r reste plus petit que a: alors on a $2d=p-p'=(a-r)-p'$, c'est-à-dire que d est le plus grand nombre entier qui soit compris dans $\frac{1}{2}(a-r)$, où donc p' peut être une quantité positive, toujours moindre que deux, mais qui peut très-bien aussi dans quelque cas spécial se réduire à zéro. Cela nous fournit les formules:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. r x\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-(r-a)q}(1+e^{-2q})^a = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-rq}(e^q+e^{-q})^a,\ r>a;\ . \quad (23)$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{(a-r)q}(1+e^{-2q})^a - 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{(a-r)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-(a-r)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-rq}(e^q+e^{-q})^a - 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{(a-r)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{(r-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq},\ r<a;(24)$$

où d est le plus grand nombre dans $\frac{1}{2}(a-r)$.

Si l'on veut prendre $p=1$ dans les équations (m), il faut faire usage de la deuxième et quatrième de ces formules, où alors d est zéro et p' l'unité; par suite:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. \{(a+1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-q}(1+e^{-2q})^a \quad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (25)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Cos.\,\{(a-1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q} e^q (1+e^{-2q})^a \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (26)$$

Prenons dans l'intégrale (1) $2a$ pour a, dans (25) $2a-1$ pour a, et dans (26) $2a+1$ pour a, l'on a:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}x.Cos.2axdx}{q^2+x^2} = \frac{\pi}{q} 2^{-2a-1}(1+e^{-2q})^{2a}, \quad \int_0^\infty \frac{Cos.^{2a-1}x.Cos.2axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a}\frac{\pi}{q} e^{-q}(1+e^{-2q})^{2a-1},$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}x.Cos.2axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q} e^q (1+e^{-2q})^{2a+1}.$$

Lorsqu'on combine celles-ci respectivement avec les formules (21) (22) et (22) (pour $a+1$ au lieu de $2a-1$) par voie d'addition et de soustraction on trouve:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}x.\, Cos.^2\, axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\left\{\binom{2a}{a} + (1+e^{-2q})^{2a} + 2\sum_1^a \binom{2a}{n+a} e^{-2nq}\right\} \quad . (27)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}x.\, Sin.^2\, axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\left\{\binom{2a}{a} - (1+e^{-2q})^{2a} + 2\sum_1^a \binom{2a}{n+a} e^{-2nq}\right\} \quad . (28)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a-1}x\; Cos.^2\, axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left\{e^{-q}(1+e^{-2q})^{2a-1} + 2\sum_0^{a-1} \binom{2a-1}{n+a} e^{-(2n+1)q}\right\}. (29)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a-1}x.Sin.^2\, axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left\{-e^{-q}(1+e^{-2q})^{2a-1} + 2\sum_0^{a-1} \binom{2a-1}{n+a} e^{-(2n+1)q}\right\}. (30)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}x.Cos.^2\, axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\left\{e^q(1+e^{-2q})^{2a+1} + 2\sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q}\right\}. (31)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}x.Sin.^2\, axdx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\left\{-e^q(1+e^{-2q})^{2a+1} + 2\sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q}\right\}. (32)$$

Afin d'obtenir encore les formules, qui sont analogues aux intégrales (25) et (26), il faut supposer successivement $r=a+1$ et $r=a-1$ dans l'équation (16), d'où résultent les deux suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\,\{(a+1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^{-q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\,\{q(2n+1)\} -$$

$$- \frac{2^{-a-1}}{q} e^q \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei.\,\{-q(2n+1)\} \ldots . \quad (33)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.\, Sin.\, \{(a-1)x\}\, dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{q} e^q \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{q(2n-1)\} -$$

$$- \frac{2^{-a-1}}{q} e^{-q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei.\, \{-q(2n-1)\} \ldots\ldots (34)$$

8. Encore les formules (L) jusques à (O) donnent pour la même supposition (l):

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos.\, a x.\, Sin.\, p x\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\pi e^{-pq} \sum_0^a \binom{a}{n} (e^{2nq}+e^{-2nq})$$

$$= 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\{(1+e^{2q})^a+(1+e^{-2q})^a\} = 2^{-a-2}\pi e^{-pq}(1+e^{2aq})(1+e^{-2q})^a,\ p>2a;\ \ldots (35)$$

$$=2^{-a-2}\pi(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\ \Bigg\}\ p=2d+p',\ p<2, d<a;$$

$$=2^{-a-2}\pi(e^{-pq}-e^{pq})(1+e^{-2q})^a+2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\ \Bigg\}\ \ldots (36)$$

$$=2^{-a-2}\pi(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\ \Bigg\}\ ,p=2d,\ d<a;$$

$$=2^{-a-2}\pi(e^{-pq}-e^{pq})(1+e^{-2q})^a+2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq}+2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\ \Bigg\}\ \ldots (37)$$

tandis que que l'on a pour $p=2a$:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos.\, ax.\, Sin.\, 2ax\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\pi e^{-2aq}\sum_0^{a-1}\binom{a}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq})+2^{-a-2}\pi e^{-4aq}$$

$$=2^{-a-2}\pi e^{-2aq}\{(1+e^{2q})^a-e^{2aq}+(1+e^{-2q})^a-e^{-2aq}\}+2^{-a-2}\pi e^{-4aq}$$

$$=2^{-a-2}\pi\{(1+e^{+2aq})(1+e^{-2q})^a-1\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (38)$$

Ensuite:

$$\int_0^\infty \frac{x Cos.^a x. Sin. ax. Sin. px dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\}-e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\}\right]$$

$$-2^{-a-2}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\}-e^{-2nq}Ei.\{q(p+2n)\}\right].\ (39)$$

$$\int_0^\infty \frac{x Cos.^a x. Cos. ax. Cos. px dx}{q^2+x^2} = -2^{-a-2}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2pq}Ei.\{-q(p+2n)\}+e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\}\right]$$

$$-2^{-a-2}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}\left[e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\}+e^{-2nq}Ei.\{q(p+2n)\}\right].\ (40)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x. Sin. ax. Cos. px\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^a \binom{a}{n}(e^{-2nq}-e^{2nq})$$
$$= 2^{-a-2}\pi e^{-pq}\{(1+e^{-2q})^a-(1+e^{2q})^a\} = 2^{-a-2}\pi e^{-pq}(1-e^{2aq})(1+e^{-2q})^a \quad \Big\}, p>2a; \ldots (41)$$

$$=2^{-a-2}\pi(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}$$
$$=2^{-a-2}\pi(e^{pq}+e^{-pq})(1+e^{-2q})^a-2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq} \quad \Big\}, p=2d+p', p'<2, d<a; \ldots (42)$$

$$=2^{-a-2}\pi(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}$$
$$=2^{-a-2}\pi(e^{pq}+e^{-pq})(1+e^{-2q})^a-2^{-a-2}\pi e^{pq}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq}-2^{-a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq} \quad \Big\}, p=2d, d<a: \ldots (43)$$

mais pour le cas de $p = 2a$, on a de nouveau:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x. Sin. ax. Cos. 2ax\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\pi e^{-2aq}\sum_0^{a-1}\binom{a}{n}(e^{-2nq}-e^{2nq})+2^{-a-2}\pi e^{-4aq}$$
$$= 2^{-a-2}\pi e^{-2aq}\{(1+e^{-2q})^a-e^{-2aq}-(1+e^{2q})^a+e^{2aq}\}+2^{-a-2}\pi e^{-4aq}$$
$$= 2^{-a-2}\pi\{(-1+e^{-2aq})(1+e^{-2q})^a+1\} \ldots\ldots\ldots\ldots (44)$$

La somme et la différence des deux intégrales (40) et (39) nous fournissent encore:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x. Cos.\{(a+p)x\}\, dx}{q^2+x^2} = -2^{-a-1}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\}-$$
$$-2^{-a-1}e^{-pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}Ei.\{q(p+2n)\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x. Cos.\{(a-p)x\}\, dx}{q^2+x^2} = -2^{-a-1}e^{pq}\sum_0^a\binom{a}{n}e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\}-$$
$$-2^{-a-1}e^{-pq}\sum_0^n\binom{a}{n}e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\}$$

Puisque la seconde expression devient identiquement égale à la première, lorsqu'on y suppose $-p$ au lieu de p, cette première vaut aussi pour des valeurs négatives de p. Prenons donc $a+p=r$, $p=r-a$, alors pour une valeur positive quelconque de r (sauf la valeur a parceque p doit toujours rester plus grand que zéro) on aura en général, puisque p est tout-a-fait arbitraire:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos. r x\, dx}{q^2+x^2} = -\, 2^{-a-1}\, e^{(r-a)q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei.\, \{q(a-r-2n)\}$$

$$-\, 2^{-a-1}\, e^{(a-r)q} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{q(r-a+2n)\} \;\ldots\ldots\; (45)$$

Mettez-y successivement $r=0$ et $r=2a$, alors il vient:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x\, dx}{q^2+x^2} = -\, 2^{-a-1}\, e^{-aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei.\, \{q(a-2n)\}$$

$$-\, 2^{-a-1}\, e^{aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{q(2n-a)\} \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (46)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos. 2ax\, dx}{q^2+x^2} = -\, 2^{-a-1}\, e^{aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei.\, \{-q(a+2n)\}$$

$$-\, 2^{-a-1}\, e^{-aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{q(a+2n)\} \;\ldots\ldots\ldots\; (47)$$

équations, dont la somme et la différence donnent:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos.^2 ax\, dx}{q^2+x^2} = -2^{-a-2} e^{aq} \sum_0^a \binom{a}{n} \left[e^{2nq} Ei.\{-q(a+2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{-q(a-2n)\}\right]$$

$$+\, 2^{-a-2}\, e^{-aq} \sum_0^a \binom{a}{n} \left[e^{-2nq}\, Ei.\, \{q(a+2n)\} + e^{2nq}\, Ei.\, \{q(a-2n)\}\right]. \; (48)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Sin.^2 ax\, dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2} e^{aq} \sum_0^a \binom{a}{n} \left[e^{2nq} Ei.\{-q(a+2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{-q(a-2n)\}\right]$$

$$+\, 2^{-a-2}\, e^{-aq} \sum_0^a \binom{a}{n} \left[e^{-2nq}\, Ei.\, \{q(a+2n)\} - e^{2nq}\, Ei.\, \{q(a-2n)\}\right]. \; (49)$$

L'on aurait pu déduire ces intégrales directement en supposant $p=a$ dans les formules (40) et (39).

Encore l'équation (45) donne pour les suppositions $r=3a$, $r=a-1$, et $r=a+1$, successivement:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Cos.^a x.\, Cos. 3ax\, dx}{q^2+x^2} = -\, 2^{-a-1}\, e^{2aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\, Ei.\, \{-2q(a+n)\}$$

$$-\, 2^{-a-1}\, e^{-2aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{2q(a+n)\} \;\ldots\ldots\; (50)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Cos.\{(a-1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = -2^{-a-1}e^{-q}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\,Ei.\{-q(2n-1)\}$$

$$-2^{-a-1}e^{q}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\,Ei.\{q(2n-1)\}\ \ldots\ldots (51)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Cos.\{(a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = -2^{-a-1}e^{q}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{2nq}\,Ei.\{-q(2n+1)\}$$

$$-2^{-a-1}e^{-q}\sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq}\,Ei.\{q(2n+1)\}\ \ldots\ldots (52)$$

et en prenant la somme et la différence des intégrales (38) et (44):

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Sin.3\,ax\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\pi\,e^{-2aq}(1+e^{-2q})^a\ \ldots\ldots (53)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Sin.\,ax\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\pi\,\{(1+e^{-2q})^a-1\}$$

dont la dernière intégrale a déjà été déduite précédemment sous la formule (5).

De même la combinaison des formules (41) et (35), (42) et (36), (43) et (37) par voie d'addition et de soustraction nous fournit:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Sin.\{(a+p)x\}\,dx}{q^2+x^2} &= 2^{-a-1}\pi\,e^{-pq}(1+e^{-2q})^a \qquad ,p>2a;\\
&= 2^{-a-1}\pi\,e^{-pq}(1+e^{-2q})^a \qquad ,p=2d+p',\ p'<2, d<a;\\
&= 2^{-a-1}\pi\,e^{-pq}(1+e^{-2q})^a \qquad ,p=2d, d<a;\\
\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Sin.\{(a-p)x\}\,dx}{q^2+x^2} &= -2^{-a-1}\pi\,e^{-pq}e^{2aq}(1+e^{-2q})^a\\
&= -2^{-a-1}\pi\,e^{-pq}(1+e^{2q})^a \qquad ,p>2a;\\
= 2^{-a-1}\pi\,e^{pq}(1+e^{-2q})^a &- 2^{-a-1}\pi\,e^{pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}\\
&- 2^{-a-1}\pi\,e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq} \qquad ,p=2d+p',\ p'<2, d<a;\\
= 2^{-a-1}\pi\,e^{pq}(1+e^{-2q})^a &- 2^{-a-1}\pi\,e^{pq}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq}\\
&- 2^{-a-1}\pi\,e^{-pq}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq} \qquad ,p=2d, d<a;
\end{aligned}\right\}\ \ldots (n)$$

Afin de pouvoir prendre le p égal à a, il faut employer la deuxième ou la troisième valeur de chaque intégrale dans les formules (n), et cela selon que a est impair ou pair; car dans le premier cas on doit avoir l'unité pour p', dans le second cas p' doit être zéro. En premier lieu les deuxième et troisième de ces équations (n) donnent chacune:

$$\int_0^\infty \frac{x \, Cos.^a x . Sin. 2\, a\, x\, d\, x}{q^2 + x^2} = 2^{-a-1} \pi \, e^{-aq} (1 + e^{-2q})^a \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (54)$$

Si l'on suppose p égal à a dans la cinquième des formules (n), on doit avoir l'unité pour p', de sorte que a ou p devienne $2\,d + 1$, c'est-à-dire impair. Au contraire l'équation sixième peut s'employer pour p égal à a; alors a ou p devient $2\,d$, un nombre pair. L'on trouve donc dans ces deux cas pour la valeur des intégrales qui correspondent à la valeur a de p, lorsqu'on lui ôte le facteur commun $2^{-a-1} \pi$, qui se trouve auprès de tous les termes:

$$e^{aq} (1 + e^{-2q})^a - e^{aq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} - e^{-aq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq},$$

$$e^{aq} (1 + e^{-2q})^a - e^{aq} \sum_0^{d-1} \binom{a}{n} e^{-2nq} - e^{-aq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}.$$

Dans la première forme on a

$$e^{-aq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} = e^{aq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{-(a-n)2q} = e^{aq} \sum_a^{a-d} \binom{a}{a-n} e^{-2nq} = e^{aq} \sum_a^{a-d} \binom{a}{n} e^{-2nq};$$

lorsqu'on tient compte de l'identité $\binom{a}{n} = \binom{a}{a-n}$; mais ici a est égal à $2\,d + 1$, donc $a - d$ à $d + 1$, de sorte que les deux sommations, qui se trouvent dans cette formule, deviennent

$$- e^{aq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} - e^{aq} \sum_a^{d+1} \binom{a}{n} e^{-2nq} = - e^{aq} \sum_0^a \binom{a}{n} e^{-2nq} = - e^{aq} (1 + e^{-2q})^a.$$

Lorsqu'on y ajoute le premier terme, la valeur totale s'évanouit, comme il doit être nécessairement, car pour la valeur a de p le facteur sous le signe d'intégration $Sin. \{(a-p)\, x\}$ devient zéro, de sorte que l'intégrale s'annullit elle-même. La même chose aura donc lieu aussi pour la forme seconde, où a est supposé être pair: là on a de même

$$e^{-aq} \sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq} = e^{aq} \sum_a^{a-d} \binom{a}{n} e^{-2nq};$$

mais ici l'on a $a = 2d$, donc $a - d = d$; et par suite les deux sommations, qui entrent dans cette forme, donneront:

$$-e^{aq}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq} - e^{aq}\sum_a^{d}\binom{a}{n}e^{-2nq} = -e^{aq}\sum_0^{a}\binom{a}{n}e^{-2nq} = -e^{aq}(1+e^{-2q})^a,$$

comme il doit être, afin que le terme entier puisse s'évanouir: ceci est donc une vérification des deux formules discutées.

Des trois premières de ces équations (n) il s'ensuit à présent, que pour $a + p = r$, $p = r - a$, leur valeur reste la même pour chaque r, qui reste plus grand que a. Si au contraire on prend $a - p = r$, $p = a - r$, et donc r moindre que a, il faut avoir recours à la sixième ou à la cinquième de ces mêmes formules, et cela selon que r est un nombre entier ou non. On aura donc:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.Sin.rx\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\pi\, e^{(a-r)q}(1+e^{-2q})^a = 2^{-a-1}\pi\, e^{-rq}(e^q+e^{-q})^a,\quad r > a; \quad (55)$$

$$= 2^{-a-1}\pi\left\{e^{(a-r)q}(1+e^{-2q})^a - e^{(a-r)q}\sum_0^{d-1}\binom{a}{n}e^{-2nq} - e^{(r-a)q}\sum_0^{d}\binom{a}{n}e^{2nq}\right\},\ r < a,\ \text{entier}; \quad (56)$$

$$= 2^{-a-1}\pi\left\{e^{(a-r)q}(1+e^{-2q})^a - e^{(a-r)q}\sum_0^{d}\binom{a}{n}e^{-2nq} - e^{(r-a)q}\sum_0^{d}\binom{a}{n}e^{2nq}\right\},\ r < a;\ \text{fractionnaire}. \quad (57)$$

où d est le plus grand nombre entier dans $\frac{1}{2}(a - r)$.

Si l'on veut prendre r égal à $a + 1$ ou $a - 1$, il faut employer respectivement les intégrales (55) et (56), et puisque d est zéro, cela nous fournit les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x.\,Sin.\,\{(a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\pi e^{-(a+1)q}(e^q+e^{-q})^a = 2^{-a-1}\pi e^{-q}(1+e^{-2q})^a. \quad (58)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Cos.^a x\ Sin.\,\{(a-1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-1}\pi\, e^q(1+e^{-2q})^a \ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (59)$$

9. Dans les paragraphes (6) à (8) nous venons de traiter les quatre premières des intégrales mentionnées en tête de cette partie deuxième, et nous en avons discuté chaque fois les cas spéciaux, qui donnaient lieu à quelque observation. La petite table ci-jointe peut servir à offrir un coup d'oeuil sur les résultats acquis; on y a noté les formules qui contiennent chaque cas spécial:

	pour $r = r$,	$= 0$,	$= a$,	$= 2a$,	$= 3a$,	$= a-1$,	$= a+1$,	$= a+2$,
$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Cos. r x d x}{q^2 + x^2}$	23, 24	21, 22	1	20	19	26	25	7,
$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x. Sin. r x d x}{q^2 + x^2}$	16		2	17	18	34	33	8,
$\int_0^\infty \frac{x Cos.^a x. Cos. r x d x}{q^2 + x^2}$	45	46	3	47	50	51	52	6,
$\int_0^\infty \frac{x Cos.^a x. Sin. r x d x}{q^2 + a^2}$	55, 56, 57		5	54	53	59	58	9.

10. Lorsqu'on prend dans les formules (l) $\frac{\pi}{2} - x$ pour x, l'on a

$$Sin.^a x. Cos. \left\{a\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} = 2^{-a}\left\{1 + \sum_1^a \binom{a}{n} (-1)^n Cos. 2 n x\right\},$$

$$Sin.^a x. Sin. \left\{a\left(\frac{\pi}{2} - x\right)\right\} = - 2^{-a} \sum_1^a \binom{a}{n} (-1)^n Sin. 2 n x.$$

Prenons ensuite $2a$ et $2a + 1$ successivement comme valeurs de a, il vient :

$$\left.\begin{array}{l} \varphi_1(x) = Sin.^{2a} x. Cos. 2 a x = (-1)^a 2^{-2a}\left\{1 + \sum_1^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} Cos. 2 n x\right\} \\ \quad ou = Sin.^{2a+1} x. Sin. \{(2a+1)x\} = (-1)^a 2^{-2a-1}\left\{1 + \sum_1^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} Cos. 2nx\right\} \\ \varphi_2(x) = Sin.^{2a} x. Sin. 2 a x = (-1)^a 2^{-2a} \sum_1^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} Sin. 2 n x \\ \quad ou = Sin.^{2a+1} x. Cos. \{(2a+1)x\} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} \sum_1^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} Sin. 2 n x \end{array}\right\} (o)$$

Les deux premières formes se trouvent désignées ici par la fonction $\varphi_1(x)$, les deux dernières au contraire par la fonction $\varphi_2(x)$, parcequ'elles pourront satisfaire la définition respective, qui est contenue dans les équations (a). Dans l'application des formules générales (A) et (B) l'on voit que s a ici partout la valeur 2, et puisque on a respectivement:

$$c = 2a \quad , \mathrm{A}_n = (-1)^a 2^{-2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \quad , \mathrm{A}_0 = (-1)^a 2^{-2a};$$

$$= 2a+1 , \mathrm{A}_n = (-1)^a 2^{-2a-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} , \mathrm{A}_0 = (-1)^a 2^{-2a-1};$$

$$= 2a \quad , \mathrm{B}_n = (-1)^a 2^{-2a} (-1)^n \binom{2a}{n};$$

$$= 2a+1 , \mathrm{B}_n = (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n};$$

les formules (C), (D), (E), (E_1) — auprès de la dernière les deux formes de $\varphi_1(x)$ peuvent être tres-bien combinées ici d'une telle manière, que les deux termes A_0 deviennent égaux et que par suite il se détruisent mutuellement — et (F) fournissent donc ici:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\, Cos.\, 2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} (1-e^{-2q})^{2a} \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (60)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x.\, Sin.\, \{(2a+1)x\}\, d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} (1-e^{-2q})^{2a+1} \quad \ldots \ldots \quad (61)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin\, 2axdx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{1}{q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \{e^{-2nq} Ei.(2nq) - e^{2nq} Ei.(-2nq)\} . \quad (62)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x.\, Cos.\, \{(2a+1)x\}\, d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{1}{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n}$$

$$\{e^{-2nq} Ei.(2\,n\,q) - e^{2nq} Ei.(-2\,n\,q)\} \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (63)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos.\, 2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = \infty \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (64)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x.\, Sin.\, \{(2a+1)x\}\, d\,x}{q^2+x^2} = \infty \quad \ldots \ldots \ldots \ldots \quad (65)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos.\, 2\,a\,x - 2\,x.\, Sin.^{2a+1} x.\, Sin.\, \{(2a+1)x\}}{q^2+x^2}\, d\,x =$$

$$(-1)^a 2^{-2a-1} \sum_1^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \{e^{2nq} Ei.(-2\,n\,q) + e^{-2nq} Ei.(2\,n\,q)\}$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} \sum_1^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \{e^{2nq} Ei.(-2\,n\,q) + e^{-2nq} Ei.(2\,n\,q)\} \quad . \quad (66)$$

$$\int_0^\infty \frac{2\,x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,2\,a\,x + x.\,Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\,\{(2\,a-1)\,x\}}{q^2+x^2}\,dx =$$

$$(-1)^a\,2^{-2a}\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}\{e^{2nq}\,Ei.(-2\,n\,q)+e^{-2nq}\,Ei.(2\,n\,q)\}$$

$$+(-1)^{a-1}\,2^{-2a}\sum_1^{2a-1}(-1)^n\binom{2\,a-1}{n}\{e^{2nq}\,Ei.(-2\,n\,q)+e^{-2nq}\,Ei\,(2\,n\,q)\}\;.\;(67)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,2\,a\,x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{-2nq}$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\,\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(68)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,\{(2\,a+1)\,x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\sum_1^{2a+1}(-1)^n\binom{2\,a+1}{n}e^{-2nq}$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}\;.\;.\;(69)$$

De ces formules les intégrales (66) et (67) donnent en premier lieu après la réduction des fonctions goniométriques qui se trouvent sous le signe d'intégration:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,\{(2\,a+2)\,x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\Big[e^{2(2a+1)q}\,Ei.\,\{-2\,q\,(2\,a+1)\}$$

$$+e^{-2(2a+1)q}Ei.\{2q(2a+1)\}+\sum_1^{2a}(-1)^{n-1}\left\{\binom{2a+1}{n}-\binom{2a}{n}\right\}\{e^{2nq}Ei.(-2nq)+e^{-2nq}Ei.(2nq)\}\Big].(70)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\,\{(2\,a+1)\,x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a}\Big[e^{4aq}\,Ei.(-4aq)+e^{-4aq}\,Ei.(4aq)$$

$$+\sum_1^{2a-1}(-1)^n\left\{\binom{2\,a}{n}-\binom{2\,a-1}{n}\right\}\{e^{2nq}\,Ei.(-2\,n\,q)+e^{-2nq}\,Ei.(2\,n\,q)\}\Big]\;.\;.\;.\;(71)$$

En appliquant les mêmes équations goniométriques dont on a fait usage ici, c'est-à-dire

$$Sin.^{2a}x.\,Cos.\,2\,a\,x - 2\,Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,\{(2\,a+1)\,x\} = Sin.^{2a}x.\,Cos.\,\{(2\,a+2)\,x\},$$

$$2\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,2\,a\,x + Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\,\{(2\,a-1)\,x\} = Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\,\{(2\,a+1)\,x\},$$

l'on peut encore tirer des équations (60) et (61) les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Cos.\,\{(2\,a+2)\,x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\,\{(1-e^{-2q})^{2a}-(1-e^{-2q})^{2a+1}\}$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-1}\,\frac{\pi}{q}\,e^{-2q}\,(1-e^{-2q})^{2a}\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;(72)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a-1}x.\,Sin.\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\{(1-e^{-2q})^{2a}-(1-e^{-2q})^{2a-1}\}$$

$$= (-1)^{a-1}\, 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\, e^{-2q}(1-e^{-2q})^{2a-1} \ldots\ldots (73)$$

De même on a encore les formules goniométriques analogues:

$$Sin.^{2a}x.\,Sin.\,2ax + 2\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,\{(2a+1)x\} = Sin.^{2a}x.\,Sin.\,\{(2a+2)x\},$$

$$-2\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,2ax + Sin.^{2a-1}x.\,Cos.\,\{(2a-1)x\} = Sin.^{2a-1}x.\,Cos.\,\{(2a+1)x\};$$

et lorsqu'on les applique respectivement aux intégrales (62) et (65), (68) et (69), on trouve les formules suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.\{(2a+2)x\}\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-1}\Big[\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}$$

$$-\sum_1^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}\{e^{-2nq}Ei\,(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}\Big]$$

$$= \frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-1}\Big[e^{-2(2a+1)q}Ei.\,\{2q(2a+1)\}-e^{2(2a+1)q}Ei.\,\{-2q(2a+1)\}$$

$$-\sum_1^{2a}(-1)^n\Big\{\binom{2a+1}{n}-\binom{2a}{n}\Big\}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}\Big].\ (74)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a-1}x.Cos.\{(2a+1)x\}dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a}\Big[\sum_1^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}$$

$$-\sum_1^{2a-1}(-1)^n\binom{2a-1}{n}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}\Big]$$

$$= \frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a}\Big[e^{-4aq}Ei.(4aq)-e^{4aq}Ei.(-4aq)$$

$$+\sum_1^{2a-1}(-1)^n\Big\{\binom{2a}{n}-\binom{2a-1}{n}\Big\}\{e^{-2nq}Ei.(2nq)-e^{2nq}Ei.(-2nq)\}\Big].\ (75)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\{(2a+2)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1-(1-e^{-2q})^{2a+1}+1\}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\, e^{-2q}(1-e^{-2q})^{2a} \ldots\ldots\ldots (76)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a-1}x.Cos.\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1-(1-e^{-2q})^{2a-1}+1\}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a}\pi\, e^{-2q}(1-e^{-2q})^{2a-1} \ldots\ldots\ldots (77)$$

11. A présent il nous faut substituer les valeurs de $\varphi_1(x)$ et de $\varphi_2(x)$ des équations (o) dans les formules générales (G) à (K), et cette substitution nous fournit successivement:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x . Cos. 2ax . Sin. px}{q^2+x^2} dx = \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei. \{q(p-2n)\} + e^{-2nq} Ei. \{q(p+2n)\} \Big]$$
$$+ \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei. \{-q(p+2n)\} + e^{-2nq} Ei. \{-q(p-2n)\} \Big] . \quad (78)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Sin. \{(2a+1)x\} . Sin. px dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-3} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei. \{q(p-2n)\} + e^{-2nq} Ei. \{q(p+2n)\} \Big]$$
$$+ \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei. \{-q(p+2n)\} + e^{-2nq} Ei. \{-q(p-2n)\} \Big] . \quad (79)$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x . Sin. 2ax . Sin. px dx}{q^2+x^2} &= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} (e^{2nq} - e^{-2nq}) \\ &= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-pq} \{(1-e^{2q})^{2a} - (1-e^{-2q})^{2a}\} \\ &= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-pq} (e^{4aq}-1)(1-e^{-2q})^{2a} \end{aligned}\right\} , p \geqq 4a; \quad \ldots (80)$$

$$\left.\begin{aligned} &= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \Big[(e^{pq}-e^{-pq}) \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - e^{pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} \\ &\qquad + e^{-pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big] \\ &= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \Big[(e^{pq}-e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} \\ &\qquad + e^{-pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big] \end{aligned}\right\} , p = 2d+p', \; p' < 2, d < 2a; \quad \ldots\ldots (81)$$

$$\left.\begin{aligned} \int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Cos. \{(2a+1)x\} . Sin. px dx}{q^2+x^2} &= \\ &= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{q} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} (e^{2nq} - e^{-2nq}) \\ &= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{q} e^{-pq} \{(1-e^{2q})^{2a+1} - (1-e^{-2q})^{2a+1}\} \\ &= (-1)^a 2^{-2a-3} \frac{\pi}{q} e^{-pq} (e^{(2a+1)2q}+1)(1-e^{-2q})^{2a+1} \end{aligned}\right\} , p \geqq 4a+2; \quad \ldots\ldots (82)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,\{(2a+1)x\}\,.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$
$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}-e^{-pq})\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}+e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$
$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}-e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}$$
$$-e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}+e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$
$, p=2d+p', \ p'<2, d<2a+1;$ . . . . (83)

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Cos.\,2\,a\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq})$$
$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\{(1-e^{2q})^{2a}+(1-e^{-2q})^{2a}\}$$
$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}e^{-pq}(e^{4aq}+1)(1-e^{-2q})^{2a}$$
$, p \geqq 4a;$ . . (84)

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$
$$+e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a}-e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$
$$+e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$, p=2d+p', \ p'<2, d<2a;$ . . . . . (85)

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,\{(2a+1)x\}\,.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$
$$= (-1)^a\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq})$$
$$= (-1)^a\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}e^{-pq}\{(1-e^{2q})^{2a+1}+(1-e^{-2q})^{2a+1}\}$$
$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\frac{\pi}{q}e^{-pq}(e^{(2a+1)2q}-1)(1-e^{-2q})^{2a+1}$$
$, p \geqq 4a+2;$ . . . . (86)

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Sin. \{(2a+1)x\}. Cos. p x d x}{q^2+x^2} = \\ &= (-1)^a 2^{-2a-3} \frac{\pi}{q} \left[(e^{pq}+e^{-pq}) \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} \right. \\ &\left. - e^{pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \right] \\ &= (-1)^a 2^{-2a-3} \frac{\pi}{q} \left[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a+1} \right. \\ &\left. - e^{pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \right]\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&, p = 2d+p', \\ &p' < 2, d < 2a+1; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots (87)\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin. 2ax. Cos. p x d x}{q^2+x^2} =$$

$$= \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \left[e^{2nq} Ei. \{q(p-2n)\} - e^{-2nq} Ei. \{q(p+2n)\} \right]$$

$$+ \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \left[e^{2nq} Ei. \{-q(p+2n)\} - e^{-2nq} Ei. \{-q(p-2n)\} \right]. (88)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. \{(2a+1)x\}. Cos. p x d x}{q^2+x^2} =$$

$$= \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-3} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \left[e^{2nq} Ei. \{q(p-2n)\} - e^{-2nq} Ei. \{q(p+2n)\} \right]$$

$$+ \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-3} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \left[e^{2nq} Ei. \{-q(p+2n)\} - e^{-2nq} Ei. \{-q(p-2n)\} \right]. (89)$$

Mais ces formules (78) jusqu'à (89) donnent lieu de nouveau aux observations suivantes. En premier lieu, lorsqu'on combine les équations (88) et (78), (79) et (89) par voie d'addition et de soustraction, on obtient successivement:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin. \{(2a+p)x\} d x}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-1} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(p+2n)\}$$

$$+ \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-1} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} Ei. \{-q(p+2n)\},$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin. \{(2a-p)x\} d x}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-1} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} Ei. \{q(p-2n)\}$$

$$+ \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-1} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} Ei. \{-q(p-2n)\},$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(2a+1+p)x\}\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a-2}e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}Ei.\{q(p+2n)\}$$

$$+\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-2}e^{pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}Ei.\{-q(p+2n)\}.$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(2a+1-p)x\}\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-2}e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}Ei.\{q(p-2n)\}$$

$$+\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a-2}e^{pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}Ei.\{-q(p-2n)\},$$

Or la dernière et la quatrième de ces équations rentrent respectivement dans les formules, qui les précèdent directement, lorsqu'on prend $-p$ au lieu de p: ainsi dans ces dernières, c'est-à-dire la première et la troisième de ces formules, il est permis de supposer p négatif. Prenons alors dans la première intégrale $2a+p=r, p=r-2a$, et dans la troisième au contraire $2a+1+p=r$, $p=r-2a-1$; alors—puisque p est tout-à-fait arbitraire, et seulement supposé plus grand que zéro, de sorte que dans les fonctions *Sin.* $\{(a\pm p)x\}$ et *Cos.* $\{(a\pm p)x\}$ la distinction entre des valeurs paires ou impaires de a doit être supprimée entièrement — alors il vient pour un r quelconque (exceptées la valeur $2a$ et $2a+1$ de r respectivement) les intégrales suivantes généralement valables:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,r\,x\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-1}e^{(2a-r)q}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}Ei.\{q(r-2a+2n)\}$$

$$+\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a-1}e^{(r-2a)q}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}Ei.\{q(2a-r-2n)\}\quad .\ (90)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.rxdx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^{a-1}}{q}2^{-2a-2}e^{(2a+1-r)q}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}Ei.\{q(r-2a-1+2n)\}$$

$$+\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-2}e^{(r-2a-1)q}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}Ei.\{q(2a+1-r-2n)\}\quad .\ .\ .\ (91)$$

La supposition des valeurs $4a$ et $6a$ pour r dans l'intégrale (90), ainsi que des valeurs 0 et $2a$ pour r dans l'autre formule (91), nous donne:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,4\,a\,x\,dx}{q^2+x^2}=\frac{(-1)^a}{q}2^{-2a-1}\Big[e^{-2aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}Ei.\{2q(a+n)\}$$

$$-e^{2aq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}Ei.\{-2q(a+n)\}\Big]\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (92)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin. 6ax\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-1} \Big[e^{-4aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} Ei. \{2q(2a+n)\}$$
$$- e^{4aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} Ei. \{-2q(2a+n)\} \Big] \dots\dots\dots (93)$$

$$\int_0 \frac{Sin.^{2a+1} x dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} \Big[e^{(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(2n-2a-1)\}$$
$$- e^{-(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{q(2a+1-2n)\} \Big] \dots\dots (94)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. 2ax\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} \Big[e^{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(2n-1)\}$$
$$- e^{-q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{q(1-2n)\} \Big] \dots\dots (95)$$

L'on peut prendre encore la somme et la différence des deux dernières intégrales (94) et (95) pour obtenir les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos.^2 ax\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{(a-n)2q} Ei. \{q(2n-2a-1)\}$$
$$+ e^{-2nq} Ei. \{q(2n-1)\} \Big]$$
$$+ \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-3} e^{-q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-(a-n)2q} Ei. \{q(2a+1-2n)\} + e^{2nq} Ei. \{q(1-2n)\} \Big] . (96)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Sin.^2 ax\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{(a-n)2q} Ei. \{q(2n-2a-1)\}$$
$$- e^{-2nq} Ei. \{q(2n-1)\} \Big]$$
$$+ \frac{(-1)^a}{q} 2^{-2a-3} e^{-q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-(a-n)2q} Ei. \{q(2a+1-2n)\} - e^{2nq} Ei. \{q(1-2n)\} \Big] . (97)$$

Prenons ensuite dans l'intégrale (91) $r=4a+2$ en $r=6a+3$, alors:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. \{(2a+1)2x\}\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} \Big[e^{-(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(2a+1+2n)\}$$
$$- e^{(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{-q(2n+2a+1)\} \Big] . (98)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. \{(2a+1)3x\}\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-2} \Big[e^{-(2a+1)2q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{2q(2a+1+n)\}$$
$$- e^{(2a+1)2q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{-2q(n+2a+1)\} \Big] \dots (99)$$

Et combinons enfin les intégrales (94) et (98) tant en les additionnant, qu'aussi en les soustrayant, pour acquérir les formules:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.^2\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{-(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-2nq} Ei.\{q(2n+2a+1)\}$$

$$- e^{2nq}\, Ei.\{q(2a+1-2n)\}\Big]$$

$$+ \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-2nq} Ei.\{q(2n-2a-1)\} - e^{2nq} Ei.\{-q(2n+2a+1)\}\Big]. \quad (100)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Sin.^2\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = \frac{(-1)^{a}}{q} 2^{-2a-3} e^{-(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-2nq} Ei.\{q(2n+2a+1)\}$$

$$+ e^{2nq}\, Ei.\{q(2a+1-2n)\}\Big]$$

$$+ \frac{(-1)^{a-1}}{q} 2^{-2a-3} e^{(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1^n) \binom{2a+1}{n} \Big[e^{-2nq} Ei.\{q(2n-2a-1)\} + e^{2nq} Fi.\{-q(2n+2a+1)\}\Big]. \quad (101)$$

Retournons aux équations (78) à (89) et prenons la somme et la différence des intégrales (84) et (80), de (85) et (81), de (86) et (82) et de (87) et (83) respectivement, nous aurons:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Cos.\{(2a+p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-pq}(1-e^{-2q})^{2a}, \quad p \geqq 4a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-pq}(1-e^{-2q})^{2a}, \quad p = 2d+p',\ p'<2, d<2a+1;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Cos.\{(2a-p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-pq}(1-e^{2q})^{2a}, \quad p \geqq 4a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q}\Big[e^{pq}(1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\Big], \quad p = 2d+p',\ p'<2, d<2a;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Sin.\{(2a+1-p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-pq}(1-e^{2q})^{2a+1}, \quad p \geqq 4a+2;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q}\Big[e^{pq}(1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq}\Big], \quad p = 2d+p',\ p'<2, d<2a+1;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Sin.\{(2a+1+p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-pq}(1-e^{-2q})^{2a+1}, \quad p \geqq 4a+2;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-pq}(1-e^{-2q})^{2a+1}, \quad p = 2d+p',\ p'<2, d<2a+1; \qquad (p)$$

Supposons dans la première et la troisième de ces formules (p) que p devienne $4a$, car pour cette valeur de p elles valent seulement à l'exception des autres formules correspondantes; il vient:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos. 6ax\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-4aq} (1-e^{-2q})_{2a} \ldots\ldots\ldots\ldots (102)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos. 2ax\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-4aq} (1-e^{2q})^{2a} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} (1-e^{-2q})^{2a},$$

dont la dernière a été déduite précédemment dans la formule (60).

De même lorsqu'on suppose dans les équations cinquième et septième des formules (p) que p devienne $4a+2$, et pour cette valeur les autres formules correspondantes ne valent plus, tandis que chez celles-là cette supposition est permise, on a

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Sin. \{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-(4a+2)q} (1-e^{2q})^{2a+1}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} (1-e^{-2q})^{2a+1}$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x\ Sin. \{(2a+1)3x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{-(4a+2)q} (1-e^{-2q})^{2a+1} \quad . (103)$$

dont la première est de nouveau la même formule que l'intégrale (61) trouvée antérieurement.

Afin de pouvoir prendre $2a$ pour la valeur de p, il faut au contraire employer la deuxième et la quatrième des équations (p), car c'est seulement dans celles-là qu'une telle supposition est permise: soit donc $d = a$ et p' zéro, alors:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos. 4ax\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} e^{-2aq} (1-e^{-2q})^{2a} \ldots\ldots\ldots\ldots (104)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \Big[e^{2aq} (1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$+ e^{-2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} - e^{2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + e^{-2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big] . (105)$$

La somme et la différence des intégrales (60) et (105) fournissent:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x . Cos.^2 a x d x}{q^2 + x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \Big[(e^{2aq}+1)(1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$+ e^{-2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big] \dots \dots \dots (106)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x . Sin.^2 a x d x}{q^2 + x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \Big[(e^{2aq}-1)(1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$+ e^{-2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big] \dots \dots \dots (107)$$

et de même la somme et la différence des intégrales (105) et (104) encore:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x . Cos.^2 2 a x d x}{q^2 + x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \Big[(e^{2aq}+e^{-2aq})(1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$+ e^{-2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big] \dots \dots \dots (108)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x . Sin.^2 2 a x d x}{q^2 + x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \Big[(e^{2aq}-e^{-2aq})(1-e^{-2q})^{2a} - e^{2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}$$

$$+ e^{-2aq} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big] \dots \dots \dots (109)$$

Lorsqu'on veut donner la valeur $2a+1$ à p, il faut prendre les équations sixième et huitième des formules (p), puisque cette supposition est seulement permise dans ces valeurs-là: alors d est plus petit que $2a$, et p' est égal à l'unité. La première de ces intégrales se réduit à zéro, après les transformations nécessaires des sommations, et cela s'ensuit aussi de la nature de l'intégrale elle-même: la dernière au contraire fournit ici:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Sin.\{(2a+1) 2x\} dx}{q^2 + x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} e^{(2a+1)q} (1-e^{-2q})^{2a+1} \dots (110)$$

Après avoir considéré ces quelques cas spéciaux, retournons vers les équations plus générales (p), pour en déduire à présent quelques corollaires générales. En premier lieu il s'ensuit des deux premières de ces formules, lorsque r a la valeur $2a+p$, et donc qu'il est plus grand que $2a$, qu'alors l'intégrale correspondante garde toujours la même valeur; tout de même les deux dernières de ces formules (p) nous apprennent que l'intégrale correspondante ne change pas de valeur, quelle que soit la valeur de r égale à $2a+1+p$, donc pourvu que r soit plus grand que $2a+1$. Lorsqu'ensuite on suppose dans la quatrième des équations (p) que r soit égal à $2a-p$, on obtient la valeur de la première

intégrale, tant que r reste moindre que $2a$, tandis que la supposition de r égal à $2a+1-p$, dans la sixième de ces mêmes équations (p) nous fournit la valeur de la seconde intégrale pour un r quelconque, pourvu qu'il soit moindre que $2a+1$. Tout cela on peut le réunir dans les formules suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\,Cos.\,r x\,d x}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q} e^{(2a-r)q}(1-e^{-2q})^{2a}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q} e^{-rq}(e^q-e^{-q})^{2a}\ ,\ r > 2a\ ; \ \ldots\ldots (111)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\Big[e^{(2a-r)q}(1-e^{-2q})^{2a} - e^{(2a-r)q}\sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + e^{(r-2a)q}\sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\Big]\ ,\ r < 2a\ ;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\Big[e^{-rq}(e^q-e^{-q})^{2a} - e^{(2a-r)q}\sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} + e^{(r-2a)q}\sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\Big]\ \ldots (112)$$

où d est le plus grand nombre entier dans $a-\frac{1}{2}r$;

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x.\,Sin.\,r x\,d x}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q} e^{(2a+1-r)q}(1-e^{-2q})^{2a+1}$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q} e^{-rq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\ ;\ r > 2a+1\ ; \ \ldots (113)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[e^{-rq}(e^q-e^{-q})^{2a+1} - e^{(2a+1-r)q}\sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{(r-2a-1)q}\sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq}\Big]\ ,\ r < 2a+1\ ; \ \ldots (114)$$

, où d est le plus grand nombre entier dans $\frac{1}{2}(2a+1-r)$.

Prenons dans les intégrales (112) et (114) $2a-1$ et $2a$ respectivement pour la valeur spéciale de r; alors dans les deux cas d devient zéro, de sorte que les sommations que l'on rencontre dans ces formules s'évanouissent: il nous reste donc:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x.\,Cos.\,\{(2a-1)x\}\,d x}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\big[e^q(1-e^{-2q})^{2a} - e^q + e^{-q}\big]\ .\ (115)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x.\,Sin.\,2a x\,d x}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\big[e^q(1-e^{-2q})^{2a+1} - e^q + e^{-q}\big]\ .\ .\ (116)$$

La même chose a lieu, lorsque dans les intégrales (112) et (114) on donne à r respectivement les valeurs $2a-p$ et $2a+1-p$, où p doit être plus petit que 2, de sorte que

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Cos.\{(2a-p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left[e^{pq}(1-e^{-2q})^{2a}-e^{pq}+e^{-pq}\right], p<2;\ldots (117)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Sin.\{(2a+1-p)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\left[e^{pq}(1-e^{-2q})^{2a+1}-e^{pq}+e^{-pq}\right], p<2; (118)$$

12. Il nous reste à présent encore à substituer les mêmes valeurs de $\varphi_1(x)$ et de $\varphi_2(x)$ des équations (o) dans les formules générales (L) à (O). Alors les théorèmes (L_1) (L_2) et (L_4) nous donnent:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a}x.\,Cos.2ax.Sin.px\,dx}{q^2+x^2} &= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi e^{-pq}\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}(e^{2nq}+e^{-2nq})\\ &= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi e^{-pq}\{(1-e^{2q})^{2a}+(1-e^{-2q})^{2a}\}\\ &= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi e^{-pq}(1+e^{4aq})(1-e^{-2q})^{2a}\end{aligned}\right\}, p>4a; \ldots (119)$$

$$\left.\begin{aligned}&=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\\ &\qquad\qquad+e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\\ &=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})(1-e^{-2q})^{2a}+e^{pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\\ &\qquad\qquad+e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&p=2d+p',\\ &p'<2, d<2a;\\ &\ldots (120)\end{aligned}$$

$$\left.\begin{aligned}&=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\\ &\qquad\qquad+e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\\ &=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{-pq}-e^{pq})(1-e^{-2q})^{2a}+e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\\ &\qquad\qquad+e^{-pq}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\end{aligned}\right\} \begin{aligned}&p=2d, d<2a;\\ &\ldots (121)\end{aligned}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x . Sin. \{(2a+1)x\} . Sin. px\, dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-3} \pi e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} (e^{2nq}+e^{-2nq})$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-3} \pi e^{-pq} \{(1-e^{2q})^{2a+1} + (1-e^{-2q})^{2a+1}\}$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-3} \pi e^{-pq} (1-e^{(2a+1)2q}) (1-e^{-2q})^{2a+1}$$
$, p > 4a+2;$ . . . . . (122)

$$= (-1)^a 2^{-2a-3} \pi \Big[(e^{-pq}-e^{pq}) \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big]$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-3} \pi \Big[(e^{-pq}-e^{pq}) (1-e^{-2q})^{2a+1} + e^{pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big]$$
$, p = 2d + p', p' < 2, d < 2a+1;$ . . . . (123)

$$= (-1)^a 2^{-2a-3} \pi \Big[(e^{-pq}-e^{pq}) \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{pq} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big]$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-3} \pi \Big[(e^{pq}-e^{-pq}) (1-e^{-2q})^{2a+1} + e^{pq} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} + e^{-pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big]$$
$, p = 2d, d < 2a+1;$ . . . . (124)

tandis que la formule (L_2), qui ne vaut que pour $p=4a$ et $p=4a+2$ respectivement, devient ici:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x . Cos. 2ax . Sin. 4ax\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{-4aq} \sum_0^{2a-1} (-1)^n \binom{2a}{n} (e^{2nq}+e^{-2nq}) + e^{-8aq} \Big]$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi \big[e^{-4aq} \{(1-e^{2q})^{2a} - e^{4aq} + (1-e^{-2q})^{2a} - e^{-4aq}\} + e^{-8aq} \big]$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi \big[(1+e^{-4aq}) (1-e^{-2q})^{2a} - 1 \big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (125)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x . Sin. \{(2a+1)x\} . Sin. \{(2a+1)2x\}\, dx}{q^2+x^2}$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-3} \pi \Big[e^{-(4a+2)q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a+1}{n} (e^{2nq}+e^{-2nq}) + e^{-(8a+4)q} \Big]$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-3} \pi \big[e^{-(4a+2)q} \{(1-e^{2q})^{2a+1} - e^{(2a+1)2q} + (1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{-(2a+1)2q}\} + e^{-(8a+4)q} \big]$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \big[(1-e^{-(4a+2)q}) (1-e^{-2q})^{2a+1} + 1 \big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (126)$$

Ensuite l'application des équations générales (M) et (N) donne dans ce cas-ci :

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, 2ax.\, Sin\; px\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{-q(p+2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\Big]$$
$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{q(p-2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{q(p+2n)\}\Big]. \quad (127)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x.\, Cos.\{(2a+1)x\}.\, Sin.\, px\,dx}{q^2+x^2} =$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{-q(p+2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\Big]$$
$$+ (-1)^a 2^{-2a-3} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{q(p-2n)\} - e^{-2nq} Ei.\{q(p+2n)\}\Big]. \quad (128)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos.\, 2ax.\, Cos.\, px\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{-q(p+2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\Big]$$
$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{q(p-2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{q(p+2n)\}\Big]. \quad (129)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x.\, Sin.\{(2a+1)x\}.\, Cos.\, px\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{-q(p+2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{-q(p-2n)\}\Big]$$
$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{q(p-2n)\} + e^{-2nq} Ei.\{q(p+2n)\}\Big]. \quad (130)$$

Enfin par l'intermédiaire des formules générales O_1 O_3, O_4 on obtient ici :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, 2ax.\, Cos.\, px\,dx}{q^2+x^2} &= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} (e^{-2nq} - e^{2nq}) \\ &= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} \{(1-e^{-2q})^{2a} - (1-e^{2q})^{2a}\} \\ &= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} (1-e^{4aq})(1-e^{-2q})^{2a}\end{aligned}\right\} p>4a; \quad (131)$$

$$\int_0^\infty \frac{x \,Sin.^{2a}x.Sin.2ax.Cos.pxdx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$
$$-e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a}-e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$
$$-e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$$, p=2d+p', \; p'<2, d<2a; \quad \ldots (132)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$
$$-e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a}-e^{pq}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}$$
$$-e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$$, p=2d, d<2a; \quad \ldots (133)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(2a+1)x\}.Cos.pxdx}{q^2+x^2}=$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi e^{-pq}\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}(e^{-2nq}-e^{2nq})$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi e^{-pq}\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-(1-e^{2q})^{2a+1}\}$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi e^{-pq}(1+e^{(4a+2)q})(1-e^{-2q})^{2a+1}$$
$$, p>4a+2; \quad \ldots (134)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}$$
$$-e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}$$
$$-e^{pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{-pq}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$
$$, p=2d+p', \; p'<2, d<2a+1; \quad \ldots (135)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x .\, Cos. \{(2a+1)x\}.\, Cos.\, p\, x\, d\, x}{q^2+x^2} =$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \Big[(e^{pq}+e^{-pq}) \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq}$$
$$- e^{pq} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} - e^{-pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big]$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \Big[(e^{pq}+e^{-pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}$$
$$- e^{pq} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} - e^{-pq} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big]$$
$$, p = 2d, d < 2a+1; \quad \ldots\ldots\ldots (136)$$

tandis que enfin la formule (0_2) nous fournit les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a} x . Sin. 2ax\, Cos. 4ax dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{-4aq} \sum_0^{2a-1} (-1)^n \binom{2a}{n} (e^{-2nq}-e^{2nq}) + e^{-8aq} \Big]$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{-4aq} \{(1-e^{-2q})^{2a} - e^{-4aq} - (1-e^{2q})^{2a} + e^{4aq}\} + e^{-8aq}$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[(1-e^{-4aq})(1-e^{-2q})^{2a} - 1 \Big] \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (137)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a+1} x.\, Cos. \{(2a+1)x\}.\, Cos. \{(2a+1)\, 2x\}\, dx}{q^2+x^2} =$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \Big[e^{-(4a+2)q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a+1}{n} (e^{-2nq} - e^{2nq}) + e^{-(8a+4)q} \Big]$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \Big[e^{-(4a+2)q} \{(1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{-(2a+1)2q} - (1-e^{2q})^{2a+1} + e^{(2a+1)2q}\} + e^{-(8a+4)q}$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \Big[(1+e^{-(4a+2)q})(1-e^{-2q})^{2a+1} + 1 \Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (138)$$

Et ces formules diverses offrent une nouvelle occasion pour quelques observations et particularisations suivantes. En premier lieu on peut prendre la somme et la différence des intégrales (129) et (127) et des autres (130) et (128): de cette manière l'on acquiert les formules:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos. \{(2a+p)x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\, Ei. \{-q(p+2n)\}$$
$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}\, Ei. \{q(p+2n)\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos. \{(2a-p)x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} e^{pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq}\, Ei. \{-q(p-2n)\}$$
$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} e^{-pq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq}\, Ei. \{q(p-2n)\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x . Sin. \{(2a+1+p)x\} \, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{-q(p+2n)\}$$
$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(p+2n)\}$$
$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x . Sin. \{(2a+1-p)x\} \, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{-q(p-2n)\}$$
$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-pq} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{q(p-2n)\}$$

Ici la deuxième et la quatrième de ces équations se laissent aisément transformer dans celles qui les précédent respectivement: de sorte que celles-ci, c'est-à-dire la première et la troisième, valent aussi pour des p négatifs. Prenons dans la première $2a+p=r$, donc $p=r-2a$, et de même dans la troisième $2a+1+p=r$, donc $p=r-2a-1$, de sorte que r devient tout-à-fait arbitraire dans les deux équations et peut acquérir toute valeur possible, exceptée la valeur $2a$ dans la première et $2a+1$ dans l'autre. La première propriété est évidente tout de suite, puisque p est tout-à-fait arbitraire, et que dès-lors dans les quantités $2a+p$ et $2a+1+p$ le caractère distinctif de parité ou d'imparité se perd totalement: et quant à la dernière propriété, pour ces valeurs spéciales de r, p devrait être nul, tandis qu'il doit toujours rester plus grand que zéro. Tout cela nous conduit à ces formules, qui valent généralement:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a} x . Cos. rx dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} e^{(r-2a)q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} . e^{2nq} Ei. \{q(2a-2n-r)\}$$
$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} e^{(2a-r)q} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(2n-2a+r)\} \quad . . (139)$$
$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x . Sin \, rx dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{(r-2a-1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{q(2a+1-2n-r)\}$$
$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{(2a+1-r)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} Ei. \{q(2n-2a-1+r)\} . (140)$$

De ces formules on déduit pour les valeurs spéciales $4a$ et $6a$ de r dans la formule (139), et pour les valeurs $4a+2$ et $6a+3$ de r dans la formule (140), les cas suivants:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a} x . Cos. 4ax dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-1} \Big[e^{2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} Ei. \{-2q(a+n)\}$$
$$+ e^{-2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} Ei. \{2q(n+a)\} \Big] \quad . . . . . . (141)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos.\, 6\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-1} \Big[e^{4aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{2nq}\, Ei.\, \{-2q\,(2a+n)\}$$
$$+ e^{-4aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{2\,q\,(2\,a+n)\} \Big] \ldots\ldots (142)$$

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x. Sin. \{(4a+2)x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2} \Big[e^{(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{-q(2a+1+2n)\}$$
$$+ e^{-(2a+1)q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2\,a+1}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{q\,(2\,n+2\,a+1)\} \Big] .\ (143)$$

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x. Sin. \{(6a+3)x\}\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2} \Big[e^{(2a+1)2q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} Ei. \{-2q(2a+1+n)\}$$
$$+ e^{-(2a+1)2q} \sum_0^{2a+1} (-1)^n \binom{2\,a+1}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{2\,q\,(n+2\,a+1)\} \Big] .\ (144)$$

Soit encore zéro la valeur de r dans l'intégrale (139), laquelle supposition y est permise; on trouve:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x\, d\, x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-1} \Big[e^{-2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{2nq}\, Ei.\, \{2\,q\,(a-n)\}$$
$$+ e^{2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2\,a}{n} e^{-2nq}\, Ei.\, \{2\,q\,(n-a)\} \Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (145)$$

Lorsqu'on prend la somme et la différence de la formule (64) et de cette dernière, l'on obtient

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos.^2\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = \infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (146)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.^2\, a\, x\, d\, x}{q^2+x^2} = -\infty \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (147)$$

tandis que la somme et la différence de cette même intégrale (145) avec la formule (140) nous fournissent les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Cos.^2\, 2\, a\, x\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, e^{-2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2\,a}{n} \big[e^{-2nq}\, Ei.\, \{2\,q\,(a+n)\}$$
$$+ e^{2nq}\, Ei.\, \{2q\,(a-n)\} \big]$$
$$+ (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2} e^{2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \big[e^{2nq} Ei. \{-2q(a+n)\} + e^{-2nq} Ei. \{2q(n-a)\}. \big] (148)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a} x.\,Sin.^2\, 2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} e^{-2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq}\, Ei.\,\{2\,q\,(a-n)\} - e^{-2nq}\, Ei.\,\{2q\,(a+n)\}\Big]$$

$$+ (-1)^a\, 2^{-2a-2}\, e^{2aq} \sum_0^{2a} (-1)^n \binom{2a}{n} \Big[e^{2nq} Ei.\{-2q(a+n)\} - e^{-2nq} Ei.\{2q(n-a)\}\Big]. \quad (149)$$

Ensuite l'on peut prendre encore la somme et la différence des formules spéciales (125) et (137) afin d'acquérir les suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a} x.\,Sin.\,6\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-4aq}\, (1-e^{-2q})^{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (150)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a} x.\,Sin.\,2\,a\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, \{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}.$$

Cette dernière intégrale était déjà trouvée plus haut dans la formule (68). De la même manière les intégrales (138) et (126) conduisent aux formules:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1} x.\,Cos.\,\{(2\,a+1)\,3x\}\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, \pi\, e^{-(4a+2)q}\, (1-e^{-2q})^{2a+1}. \quad (151)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1} x.\,Cos.\,\{(2\,a+1)\,x\}\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-2}\, \pi\, \{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\},$$

dont aussi la dernière se trouve déjà déduite précédemment dans l'intégrale (69).

Ensuite on peut encore combiner les autres intégrales de la série 119 à 138 par voie d'addition et de soustraction, c'est-à-dire l'intégrale (131) avec (119), (132) avec (120), (133) avec (121), (134) avec (122), (135) avec (123) et (136) avec (124). De cette manière l'on parvient aux intégrales:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a} x.\,Sin.\,\{(2\,a+p)\,x\}\,d\,x}{q^2+x^2} &= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-pq}\, (1-e^{-2q})^{2a}\,, \quad p > 4\,a;\\
&= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-pq}\, (1-e^{-2q})^{2a}\,, p = 2\,d + p', p' < 2\,, d < 2\,a;\\
&= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-pq}\, (1-e^{-2q})^{2a}\,, p = 2\,d\,, d < 2\,a;\\
\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a} x.\,Sin.\,\{(2\,a-p)\,x\}\,d\,x}{q^2+x^2} &= (-1)^{a-1}\, 2^{-2a-1}\, \pi\, e^{-pq}\, (1-e^{2q})^{2a}\,, \quad p > 4\,a;\\
= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi \Big[e^{pq}\, (1-e^{-2q})^{2a} &- e^{pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big], \; p = 2\,d + p', p' < 2\,, d < 2\,a;\\
= (-1)^a\, 2^{-2a-1}\, \pi \Big[e^{pq}\, (1-e^{-2q})^{2a} &- e^{pq} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big], \; p = 2d, d < 2a;
\end{aligned}\right\} (r)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x . Cos. \{(2a+1+p)x dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a+1}, p > 4a+1;\\
&\qquad = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a+1}, p = 2d+p', p' < 2, d < 2a+1;\\
&\qquad = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a+1}, p = 2d, d < 2a+1;\\
&\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x . Cos. \{(2a+1-p)x\} dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} e^{(4a+2)q} (1-e^{-2q})^{2a+1}\\
&\qquad = (-1)^{a} 2^{-2a-2} \pi e^{-pq} (1-e^{2q})^{2a+1}, p > 4a+2;\\
&= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq}\\
&\qquad - e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big], p = 2d+p', p' < 2, d < 2a+1;\\
&= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{pq} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq}\\
&\qquad - e^{-pq} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big], p = 2d, d < 2a+1;
\end{aligned}\right\}(r)$$

Lorsqu'on voudrait donner la valeur $2a$ à p dans la sixième de ces formules, l'intégrale acquiert une valeur nulle, aprés les réductions nécessaires des sommations pour $d=a$, comme la valeur qui suit de la supposition pour p: et cela doit être ainsi, parce que pour cette valeur de p la fonction $\{Sin.(2a-p)x\}$ sous le signe d'intégration s'évanouit elle-même. Prenons au contraire dans la troisième de ces intégrales (r) $2a$ pour valeur de p, d'où s'ensuit $d=a$ et de même dans la huitième et onzième de ces mêmes formules $2a+1$ pour valeur de p, de sorte que d soit égal à a et p' à l'unité; alors viennent les intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a} x . Sin. 4ax dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \pi e^{-2aq} (1-e^{-2q})^{2a} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (152)$$

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x . Cos. \{(2a+1)2x\} dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi e^{-(2a+1)q} (1-e^{-2q})^{2a+1}. (153)$$

$$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{-(2a+1)q} (1-e^{-2q})^{2a+1}$$
$$- e^{(2a+1)q} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} - e^{-(2a+1)q} \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big].$$

Mais

$$e^{(2a+1)q}\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} = e^{-(2a+1)q}\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2(n-2a-1)q}$$

$$= e^{-(2a+1)q}\sum_{2a+1}^{a+1}(-1)^{n-1}\binom{2a+1}{2a+1-n}e^{2nq} = -e^{-(2a+1)q}\sum_{2a+1}^{a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq},$$

lorsqu'on y fait attention qu'on a identiquement $\binom{2a+1}{2a+1-n} = \binom{2a+1}{n}$ comme précédemment. La somme des deux sommations devient donc:

$$e^{-(2a+1)q}\left[-\sum_{a+1}^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + \sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]$$

$$= e^{-(2a+1)q}\left[-\sum_0^{2a+1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]$$

$$= e^{-(2a+1)q}\left[-(1-e^{2q})^{2a+1} + 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]$$

et par suite enfin:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-(2a+1)q}\left[(1-e^{-2q})^{2a+1}+(1-e^{2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\, e^{-(2a+1)q}\left[(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]. (154)$$

De cette dernière intégrale et de la formule (153) on déduit par la sommation et la soustraction:

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.^2\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi e^{-(2a+1)q}\Big[(2-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}$$

$$-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big] \ldots\ldots\ldots\ldots (155)$$

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Sin.^2\{(2a+1)x\}\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\, e^{-(2a+1)q}\Big[(1-e^{2q})^{2a+1}$$

$$-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big] \ldots\ldots\ldots (156)$$

Quand nous regardons les équations (r) de plus près, l'on voit que les trois premières nous apprennent que l'intégrale correspondante garde la même valeur pour un r quelconque, plus grand que $2a$, si l'on y suppose $r=2a+p$. De même il suit des neuvième, dixième et onzième de ces équations, que l'in-

tégrale, dont elles expriment la valeur, ne change pour aucun r, pourvu qu'il surpasse $2a+1$, lorsqu'on y prend $2a+1+p=r$. Encore peut-on conclure de la cinquième et sixième de ces formules, quand on y suppose $2a-p=r$, donc $p=2a-r$, que leur valeur pour un r quelconque moindre que $2a$ est différente, selon que r est entier ou non: dans le premier cas on doit se servir de la sixième formule, dans le second cas au contraire de la cinquième; dans les deux cas pourtant on a $2d=p=2a-r$ et $2d=p-p'=2a-r-p'$, donc toujours d le plus grand nombre entier, qui soit contenu dans $a-\frac{1}{2}r$. De même les onzième et douzième des équations (r) nous apprennent, lorsqu'on prend $2a+1-p=r$, donc $p=2a+1-r$, que leur valeur dépend de la circonstance, que r soit un nombre entier ou non. Quand r est un nombre entier, alors il faut employer la formule douzième; dans ce cas l'on a $2d=p=2a+1-r$; au contraire la formule onzième nous peut servir, lorsque r est une fraction: alors on a $2d=p-p'=2a+1-r-p'$. Donc dans tous les cas aussi on trouve ici que d est le plus grand nombre entier qui se trouve dans $\frac{1}{2}(2a+1-r)$. On a donc:

$$\int_0^\infty \frac{x\, Sin.^{2a} x.\, Sin.\, rx\, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\, e^{(2a-r)q}(1-e^{-2q})^{2a}, \quad r>2a; \ldots . (157)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\, e^{-rq}(e^q-e^{-q})^{2a}$$

$$\left.\begin{aligned} &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[e^{(2a-r)q}(1-e^{-2q})^{2a} - e^{(2a-r)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ &\qquad - e^{(r-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \\ &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[e^{-rq}(e^q-e^{-q})^{2a} - e^{(2a-r)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ &\qquad - e^{(r-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} , r<2a, \\ r \text{ entier;} \\ \ldots (158) \end{array}$$

$$\left.\begin{aligned} &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[e^{(2a-r)q}(1-e^{-2q})^{2a} - e^{(2a-r)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ &\qquad - e^{(r-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \\ &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[e^{-rq}(e^q-e^{-q})^{2a} - e^{(2a-r)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ &\qquad - e^{(r-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big] \end{aligned}\right\} \begin{array}{l} , r<2a, \\ r \text{ fraction-} \\ \text{naire;} \\ \ldots (159) \end{array}$$

où d le plus grand nombre entier dans $(a-\frac{1}{2}r)$.

$$\int_0^\infty \frac{x \, Sin.^{2a+1} x . Cos. r x \, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \, e^{(2a+1-r)q} (1-e^{-2q})^{2a+1} \quad , r > 2a+1;$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \, e^{-rq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} \quad \ldots\ldots (160)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{(r-2a-1)q} (1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{(2a+1-r)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} \quad , r < 2a+1, \text{ entier;}$$
$$- e^{(r-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big] \ldots (161)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[e^{(r-2a-1)q} (1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{(2a+1-r)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} \quad , r < 2a+1, \text{ fractionnaire;}$$
$$- e^{(r-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big] \ldots (162)$$

où d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1-r)$.

Prenons r égal à $2a-1$ dans l'intégrale (158) et égal à $2a$ dans l'autre intégrale (161), alors, puisque dans ces deux cas on sait que d est zéro, il s'ensuit que :

$$\int_0^\infty \frac{x \, Sin.^{2a} x . Sin. \{(2a-1)x\} \, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[e^q (1-e^{-2q})^{2a} - e^q \right]$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \, e^q \{(1-e^{-2q})^{2a} - 1\} \quad \ldots (163)$$

$$\int_0^\infty \frac{x \, Sin.^{2a+1} x . Cos. 2ax \, dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \left[e^{-q} (1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{-q} \right]$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \, e^{-q} \{(1-e^{-2q})^{2a+1} - 1\} \quad \ldots (164)$$

De même donnez à r les valeurs $2a-p$ et $2a+1-p$ dans les intégrales (159) et (162) respectivement: de sorte que dans ces deux cas d doit être zéro, aussi longtemps que p reste moindre que 2: sous cette réstriction on trouve :

$$\int_0^\infty \frac{x \, Sin.^{2a} x . Sin. \{(2a-p)x\} \, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \{ e^{pq} (1-e^{-2q})^{2a} - e^{pq} - e^{-pq} \} . \; (165)$$

$$\int_0^\infty \frac{x \, Sin.^{2a+1} x . Cos. \{(2a+1-p)x\} \, dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-2} \pi \{ e^{-pq} (1-e^{-2q})^{2a+1} - e^{pq} - e^{-pq} \} . (166)$$

13. Dans les trois paragraphes précédents (10) à (12) on a étudié les quatre dernières intégrales, dont nous nous étions proposé la discussion; et l'on en a traité divers cas spéciaux. Tout comme au paragraphe 9, la table suivante peut servir à acquérir un coup d'oeuil général sur les résultats, que

l'on a trouvés: chaque fois on y a annoté les formules, où ces valeurs spéciales ont été déduites. Cette table est divisée en deux parties, selon qu'il se trouve sous le signe d'intégration la fonction $Sin.^{2a} x$ ou bien $Sin.^{2a+1} x$: du reste il est entièrement analogue à la table précédente.

pour	$r=r,$	$=0,$	$=2a,$	$=4a,$	$=6a,$	$=a+2,$	$=a-1.$
$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Cos. r x dx}{q^2+x^2}$	111, 112	105	60	104	102	72	115
$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x. Sin. r x dx}{q^2+x^2}$	90		62	92	93	74	
$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a} x. Cos. r x dx}{q^2+x^2}$	139	146	64	141	142	70	
$\int_0^\infty \frac{x Sin^{2a} x. Sin. r x dx}{q^2+x^2}$	157, 158, 159		68	152	150	76	163

pour	$r=r,$	$=0,$	$=2a+1,$	$=4a+2,$	$=6a+3,$	$=a+2,$	$=a-1.$
$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Cos. r x dx}{q^2+x^2}$	91	94	63	98	99	75	
$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x. Sin. r x dx}{q^2+x^2}$	113, 114		61	110	103	73	116
$\int_0^\infty \frac{x Sin.^{2a+1} x. Cos. r x dx}{q^2+x^2}$	160, 161, 162	154	69	153	151	77	164
$\int_0^\infty \frac{x Sin^{2a+1} x. Sin. r x dx}{q^2+x^2}$	140		65	143	144	71	

De ces cent-soixante-six intégrales il y a soixante quatre, qui ne contiennent aucune sommation, et ont ainsi des valeurs très-simples: mais aussi les autres sont composées de sommations finies, et de nature bien simple, de sorte qu'elles peuvent être aisément développées dans chaque cas spécial. L'on trouve confirmé ici, ce qui ressortait de la théorie, c'est-à-dire, que la décomposition des sommations dans un tel sens, que la fonction $p-ns$ restât toujours positive, est nécessaire dans bien des cas: néanmoins il y faut ajouter, que cette obligation s'annulle quelquefois, comme par éxemple dans les deux premières des formules (m), dans les trois premières des intégrales (n), dans les deux premières, la septième et la huitième des équations (p) et dans les trois premières, la septième, la huitième et la neuvième des formules (r).

III. DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX POUR LES CAS, OÙ F (x) EST UNE FRACTION QUI AIT LA FONCTION $1 - 2\,p\,Cos.\,s\,x + p^2$ POUR DÉNOMINATEUR. — APPLICATIONS DE CES THÉORÈMES.

14. Trois des intégrales trouvées donnent lieu à l'application d'une méthode, qui, bien que totalement indirecte, peut quelque fois faire naître des résultats intéressants. Car si l'on connaît une intégrale

$$\int_a^b f(x,c)\,dx = F(c),$$

et si la constante c est entièrement libre, c'est-à-dire qu'elle n'est pas assujettie à des limites de maximum et de minimum, alors on peut donner à c des valeurs différentes, et additionner toutes les équations qui résultent de cette substitution: et même quand c est compris entre certaines limites, cette méthode continue de subsister, pourvu qu'alors on ne surpasse pas ces limites. Lorsque on donne donc successivement à la constante c les valeurs $g, g+1, g+2, g+3 \ldots h$ (et que ces valeurs de c ne sont pas contraires aux conditions, auxquelles il est soumis) alors on peut exprimer la somme des expressions, que l'on obtient par cette méthode, de la manière suivante:

$$\sum_{c=g}^{c=h} \int_a^b f(x,c)\,dx = \int_a^b dx \sum_{c=g}^{c=h} f(x,c) = \sum_{c=g}^{c=h} F(c) \;\ldots\ldots\ldots\; (s)$$

Auprès de cette méthode il importe donc de deux points capitaux: premièrement et surtout, que la sommation des intégrales puisse se réduire à la sommation d'un seul facteur, et que cette dernière sommation de nouveau puisse être exprimée par une fonction finie — et en second lieu, que dans le second membre de l'équation précédente la sommation puisse se faire véritablement, c'est-à-dire donner lieu à une fonction fermée: lorsque cette dernière condition ne se trouve pas remplie, l'intégrale définie est réduite à une sommation, c'est-à-dire à une série, et l'on acquiert un de ces résultats dont on a déjà parlé au paragraphe premier.

Pour en venir à l'application, que je me proposais ici, il faut employer les séries

$$\left.\begin{aligned} \frac{1 - y\,Cos.\,z - y^\alpha\,Cos.\,\alpha z + y^{\alpha+1}\,Cos.\,\{(\alpha-1)z\}}{1 - 2y\,Cos.\,z + y^2} &= \sum_0^{\alpha-1} y^n\,Cos.\,n z \\ \frac{y\,Sin.\,z - y^\alpha\,Sin.\,\alpha z + y^{\alpha+1}\,Sin.\,\{(\alpha-1)z\}}{1 - 2y\,Cos.\,z + y^2} &= \sum_0^{\alpha-1} y^n\,Sin.\,n z \end{aligned}\right\} \;\ldots\; (t)$$

Ces séries sont connues, mais on peut aisément se convaincre de l'identité de ces formules: on n'a besoin que de développer actuellement la sommation et de multiplier ce développement par le dénominateur de la fonction respective; dans la première équation on obtient des produits de deux cosinus, que l'on peut réduire à la somme de deux cosinus, comme dans la seconde il faut décomposer le produit d'une sinus avec une cosinus dans la somme de deux sinus. En tous cas les formules deviennent identiques.

Lorsqu'on sait en outre que la valeur de y est comprise entre -1 et $+1$, les fonctions y^α et $y^{\alpha+1}$ s'annullent, lorsque α diverge vers l'infini, et l'on obtient dans ce cas de *Lim.* $\alpha = \infty$:

$$\frac{1 - y\, Cos.\, z}{1 - 2\, y\, Cos.\, z + y^2} = \sum_0^\infty y^n\, Cos.\, n\, z \quad , \quad \frac{y\, Sin.\, z}{1 - 2y\, Cos.\, z + y^2} = \sum_0^\infty y^n Sin. nz, \text{ pour } y^2 < 1 \,.(u)$$

Lorsqu'on prend la différence de ces dernières équations avec les formules (t) il reste:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{y^\alpha Cos.\, \alpha z - y^{\alpha+1} Cos.\, \{(\alpha-1)z\}}{1 - 2\, y\, Cos.\, z + y^2} = \sum\limits_\alpha^\infty y^n Cos. nz \text{ , ou bien } \dfrac{Cos. \alpha z - y\, Cos.\, \{(\alpha-1)z\}}{1 - 2\, y\, Cos.\, z + y^2} = \dfrac{1}{y^\alpha} \sum\limits_\alpha^\infty y^n Cos. nz \\ \dfrac{y^\alpha Sin.\, \alpha z - y^{\alpha+1} Sin.\, \{(\alpha-1)z\}}{1 - 2\, y\, Cos.\, z + y^2} = \sum\limits_\alpha^\infty y^n Sin. nz \text{ , ou bien } \dfrac{Sin. \alpha z - y\, Sin.\, \{(\alpha-1)z\}}{1 - 2\, y\, Cos.\, z + y^2} = \dfrac{1}{y^\alpha} \sum\limits_\alpha^\infty y^n Sin. nz \end{array}\right\} . (v)$$

Et d'ici l'on déduit facilement pour $z = s\,x$ et $y = p$ les équations suivantes:

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b \frac{1 - p\, Cos.\, s\, x}{1 - 2\, p\, Cos.\, s x + p^2} f(x)\, d\, x = \int_a^b f(x)\, d\, x \sum_0^\infty p^n\, Cos.\, n\, s\, x = \sum_0^\infty p^n \int_a^b f(x)\, Cos.\, n\, s\, x\, d\, x \quad \ldots (A') \\ \displaystyle\int_a^b \frac{p\, Sin.\, s\, x}{1 - 2\, p\, Cos.\, s x + p^2} f(x)\, d\, x = \int_a^b f(x)\, d\, x \sum_0^\infty p^n\, Sin.\, n\, s\, x = \sum_0^\infty p^n \int_a^b f(x)\, Sin.\, n\, s\, x\, d\, x \quad \ldots (B') \end{array}\right\} , p^2 < 1;$$

$$\left.\begin{array}{l} \displaystyle\int_a^b \frac{Cos. \alpha s x - p Cos.\, \{(\alpha-1)s x\}}{1 - 2\, p\, Cos.\, s x + p^2} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \frac{1}{p^\alpha} \sum_\alpha^\infty p^n Cos. n s x = \frac{1}{p^\alpha} \sum_\alpha^\infty p^n \int_a^b f(x) Cos. n s x dx \quad \ldots (C') \\ \displaystyle\int_a^b \frac{Sin. \alpha s x - p Sin.\, \{(\alpha-1)s x\}}{1 - 2\, p\, Cos.\, s x + p^2} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx \frac{1}{p^\alpha} \sum_\alpha^\infty p^n Sin. n s x = \frac{1}{p^\alpha} \sum_\alpha^\infty p^n \int_a^b f(x) Sin. n s x dx \quad \ldots (D') \end{array}\right\} , p^2 < 1;$$

Le premier couple de ces formules peut donc servir lorsqu'on sait, que s se trouve entre les limites zéro et l'infini, mais l'autre seulement lorsque s n'est pas situé hors des limites α et l'infini: dans toutes la valeur numérique de p doit rester moindre que l'unité.

15. Lorsqu'à présent on considère l'intégrale (23), on s'aperçoit qu'elle est très-propre à être sommée suivant les valeurs successives des r, pourvu que r soit plus grand que a: mais de l'intégrale (1) il s'ensuit que la même valeur vaut encore pour $r=a$. Prenons donc dans l'équation (C') $\alpha = a$, et $ns = r$, on aura

$$\int_0^\infty \frac{Cos.asx - pCos.\{(a-1)sx\}}{1-2p\,Cos.sx+p^2}\,\frac{Cos.^a x dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{p^a}\sum_a^\infty p^n \int_0^\infty \frac{Cos.^a x dx}{q^2+x^2}\,Cos.nsx = \frac{1}{p^a}\sum_a^\infty p^n\, 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-nsq}(e^q+e^{-q})^a$$

$$= \frac{1}{p^a}2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\sum_a^\infty p^n e^{-nsq} = \frac{1}{p^a}2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})\frac{p^a e^{(1-a)sq}}{e^{sq}-p} = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{(1-a)sq}\frac{(e^q+e^{-q})^a}{e^{sq}-p},\ s \geqq 1; \ (167)$$

et donc

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^q\frac{(1+e^{-2q})^a}{e^q-p} \text{ pour } s = 1 \ldots\ldots\ldots\ldots (168)$$

, où l'on a transformé les sommations de la manière suivante:

$$\sum_c^\infty p^n e^{-nsq} = \sum_0^\infty (pe^{-sq})^n - \sum_0^{c-1}(pe^{-sq})^n = \frac{1}{1-pe^{-sq}} - \frac{1-(pe^{-sq})^c}{1-pe^{-sq}} = \frac{(pe^{-sq})^c}{1-pe^{-sq}} = \frac{p^c e^{(1-c)sq}}{e^{sq}-p} . (w)$$

ce qui est permis ici, puisqu'on a p plus petit que l'unité, et donc d'autant plus $pe^{-sq} = p : e^{sq}$ plus petit que l'unité.

D'après la formule goniométrique

$$2\left[Cos.\{(a+1)x\} - p\,Cos.ax\right]Cos.^{a+1}x - \left[Cos.ax - p\,Cos.\{(a-1)x\}\right]Cos.^a x =$$
$$= \left[Cos.\{(a+2)x\} - p\,Cos.\{(a+1)x\}\right]Cos.^a x$$

on déduit encore de cette intégrale (168) la suivante

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\{(a+2)x\} - p\,Cos.\{(a+1)x\}}{1-2p\,Cos.x+p^2}\,\frac{Cos.^a x}{q^2+x^2}dx = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-q}\frac{(1+e^{-2q})^a}{e^q-p} \ldots (169)$$

Si de même on prend en considération l'intégrale (157), on voit qu'elle permet la même sommation à l'égard de r: et tout de même encore l'intégrale (160). Mais dans la première il faut que r surpasse $2a$, et dans la seconde que x soit plus grand que $2a+1$, tandis que les intégrales se changent respectivement dans les autres (68) et (69), qui sont trouvées précédemment, aussitôt que r atteint ces limites. Soit donc de nouveau ns égal à r dans les formules (C') et (D') et puis dans l'équation (D') $2a$ et dans (C') $2a+1$ la valeur de α. A présent il faut distinguer les deux cas, que s soit égal à l'unité ou qu'il soit plus grand. Dans le premier cas où s est l'unité, il faut diviser la sommation dans la formule (D') depuis $2a$ jusques à l'infini dans deux parties: premièrement le terme pour n égal à $2a$, pour lequel il faut employer l'intégrale (68), et ensuite la sommation depuis $a+1$ à l'infini,

où alors la formule (157) doit nous servir. Quant à la sommation dans la formule (C′), qui va de $2a+1$ à l'infini, elle est de nouveau égale à un terme détaché pour la valeur $2a+1$ de n, pour lequel vaut l'intégrale (69), et puis à une sommation depuis $2a+2$ jusques à l'infini, où il faut employer la formule (160). Lorsque au contraire s est plus grand que l'unité, il n'y a pas lieu de diviser ainsi la sommation, pour laquelle vaillent dès-lors seulement les intégrales (157) et (160). D'après tout ce qui vient d'être observé, on a

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Sin.\,2asx - p\,Sin.\{(2a-1)sx\}}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x}{q^2+x^2}\,dx &= \frac{1}{p^{2a}}\sum_{2a}^{\infty} p^n \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2}\,Sin.\,nsx\\ &= \frac{1}{p^{2a}}\Big[p^{2a}(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\} + \sum_{2a+1}^{\infty} p^n (-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-nsq}(e^q-e^{-q})^{2a}\Big]\\ &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\} + \frac{(-1)^a}{p^{2a}} 2^{-2a-1}\pi (e^q-e^{-q})^{2a} \sum_{2a+1}^{\infty} p^n e^{-nsq}\\ &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[(1-e^{-2q})^{2a}-1+\frac{(e^q-e^{-q})^{2a}}{p^{2a}}\,\frac{p^{2a+1}e^{-2aq}}{e^q-p}\Big]\\ &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big\{-1+e^q\,\frac{(1-e^{-2q})^{2a}}{e^q-p}\Big\}\end{aligned} \quad ,s=1;\ .(170)$$

$$\begin{aligned}&= \frac{1}{p^{2a}}\sum_{2a}^{\infty} p^n(-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-nsq}(e^q-e^{-q})^{2a} = \frac{1}{p^{2a}}(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\sum_{2a}^{\infty} p^n e^{-nsq}\\ &= \frac{1}{p^{2a}}(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\,\frac{p^{2a}e^{(1-2a)sq}}{e^{sq}-p} = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{(1-2a)sq}\,\frac{(e^q-e^{-q})^{2a}}{e^{sq}-p}\end{aligned} \quad ,s>1;\ .(171)$$

$$\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Cos.\{(2a+1)sx\} - p\,Cos.\,2asx}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x}{q^2+x^2}\,dx &= \frac{1}{p^{2a+1}}\sum_{2a+1}^{\infty} p^n \int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2}\,Cos.\,nsx\\ &= \frac{1}{p^{2a+1}}\Big[p^{2a+1}(-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} +\\ &\quad + \sum_{2a+2}^{\infty} p^n (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi e^{-nsq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big]\\ &= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} + \frac{(-1)^{a-1}}{p^{2a+1}} 2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\sum_{2a+2}^{\infty} p^n e^{-nsq}\\ &= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi\Big[(1-e^{-2q})^{2a+1}-1+\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{p^{2a+1}}\,\frac{p^{2a+2}e^{-(2a+1)q}}{e^q-p}\Big]\\ &= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi\Big\{-1+e^q\,\frac{(1-e^{-2q})^{2a+1}}{e^q-p}\Big\}\end{aligned} \quad ,s=1;\ .(172)$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \frac{Cos.\{(2a+1)sx\}-pCos.2asx}{1-2p\,Cos.\,s\,x+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x}{q^2+x^2}dx &= \frac{1}{p^{2a+1}}\sum_{2a+1}^{\infty} p^n\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2}Cos.nsx \\ &= \frac{1}{p^{2a+1}}\sum_{2a+1}^{\infty} p^n(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,e^{-nsq}\,(e^q-e^{-q})^{2a+1} \\ &= \frac{1}{p^{2a+1}}(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\sum_{2a+1}^{\infty} p^n e^{-nsb} \\ &= \frac{1}{p^{2a+1}}(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{p^{2a+1}\,e^{-2asq}}{e^{sq}-p} \\ &= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,e^{-2asq}\,\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{e^{sq}-p}\end{aligned}\right\}\ s>1;\ .(173)$$

où l'on a fait usage de la formule de réduction (w).

A présent on a les équations goniométriques:

$$\left[Sin\ 2ax - p\,Sin.\{(2a-1)x\}\right]Sin.^{2a}x + 2\left[Cos.\{(2a+1)x\} - p\,Cos.\,2ax\right]Sin.^{2a+1}x =$$
$$= \left[Sin.\{(2a+2)x\} - p\,Sin.\{(2a+1)x\}\right]Sin.^{2a}x,$$

$$-2\left[Sin.\{(2a+2)x\} - p\,Sin.\{(2a+1)x\}\right]Sin.^{2a+2}x + \left[Cos.\{(2a+1)x\} - p\,Cos.2ax\right]Sin.^{2a+1}x =$$
$$= \left[Cos.\{(2a+3)x\} - p\,Cos.\{(2a+2)x\}\right]Sin.^{2a+1}x;$$

et si l'on emploie ici les formules (170) et (172) il vient:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.\{(2a+2)x\}-p\,Sin.\{(2a+1)x\}}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-q}\,\frac{(1-e^{-2q})^{2a}}{e^q-p}\ .(174)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.\{(2a+3)x\}-p\,Cos.\{(2a+2)x\}}{1-2p\,Cos.\,x+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x}{q^2+x^2}dx = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-q}\frac{(1-e^{-2q})^{2a+1}}{e^q-p}\ .(175)$$

Mais on peut tout-de-même faire usage des théorèmes (A') et (B') auprès des mêmes intégrales (23), (157) et (160), sans avoir aucunément besoin des théorèmes suivants: et ceci est d'une grande importance, parce que celles-ci contiennent de nouveau des sommations, dont les limites ne sont pas indépendantes de l'argument, suivant lequel la sommation doit avoir lieu, et qui par conséquence ne sauraient servir ici. Pour cela en premier lieu il faut décomposer la sommation de zéro jusques à l'infini dans un terme détaché, qui vaut pour n égal à zéro, et dans une sommation, qui procède de l'unité à l'infini. Ensuite afin de satisfaire aux formules mentionnées, on ne doit pas perdre de vue, qu'elles ne valent que pour des valeurs de r plus grandes que a, que $2a$, ou que $2a+1$ respectivement, de sorte qu'il n'est permis d'en faire usage,

qu'autant que l'on suppose s plus grand que a, que $2a$ et que $2a+1$ respectivement. Eu égard à ces observations diverses, on acquiert par les théorèmes (A') et (B'):

$$\int_0^\infty \frac{1-p\,Cos.\,sx}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\frac{Cos.^a x}{q^2+x^2}dx = \sum_0^\infty p^n \int_0^\infty \frac{Cos.^a x\,dx}{q^2+x^2}Cos.\,nsx$$

$$=\Big[\int_0^\infty \frac{Cos.^a xdx}{q^2+x^2}+\sum_1^\infty p^n 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-nsq}(e^q+e^{-q})^a\Big]=\Big[\int_0^\infty \frac{Cos.^a xdx}{q^2+x^2}+2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\sum_1^\infty p^n e^{-nsq}\Big]$$

$$=\Big[\int_0^\infty \frac{Cos.^a x\,dx}{q^2+x^2}+2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\frac{p}{e^{sq}-p}\Big],\; s>a;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (x)$$

$$\int_0^\infty \frac{p\,Sin.\,sx}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\frac{x\,Sin.^{2a}x}{q^2+x^2}dx = \sum_0^\infty p^n\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2}Sin.\,nsx = \sum_1^\infty p^n\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2}Sin.\,nsx$$

$$=\sum_1^\infty p^n(-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-nsq}(e^q-e^{-q})^{2a} = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\sum_1^\infty p^n e^{-nsq}$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{p}{e^{sq}-p},\; s>2a;\;\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots (176)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-p\,Cos.\,sx}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\frac{x\,Sin.^{2a+1}x}{q^2+x^2}dx = \sum_0^\infty p^n\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2}Cos.\,nsx$$

$$=\Big[\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2}+\sum_1^\infty p^n\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2}Cos.\,nsx\Big]$$

$$=\Big[(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+$$
$$+\sum_1^\infty p^n(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-nsq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big]$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+$$
$$+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\sum_1^\infty p^n e^{-nsq}\Big]$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+$$
$$+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{p}{e^{sq}-p}\Big],\; s>2a+1;\;\ldots\ldots\ldots\ldots (177)$$

où l'équation de réduction (w) était nécessaire, ainsi que l'intégrale (154) en-

core auprès de la dernière. Lorsqu'encore on soustrait le double de la formule (177) de l'intégrale (154) on obtient:

$$\int_0^\infty \frac{1-p^2}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x}{q^2+x^2}\,dx =$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[e^{-(2a+1)q}\left\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right\}+\right.$$

$$\left.+\,2p\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{e^{sq}-p}\right],\ s>2a+1;\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ (178)$$

L'on n'a pas encore transformé la formule (x), parce que l'intégrale dans le second membre de cette équation acquiert une valeur différente, selon que a soit pair ou impair, comme il est évident d'après les formules (21) et (22). Avant cependant que nous passons à cette substitution, nous diminuerons le double de cette intégrale (x) de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x}{q^2+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^a x\,dx}{q^2+x^2}$$

c'est-à-dire:

$$\int_0^\infty \frac{1-p^2}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^a x}{q^2+x^2}\,dx = \int_0^\infty \frac{Cos.^a x\,dx}{q^2+x^2}+2^{-a}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\frac{p}{e^{sq}-p},\ s>a;\ \ldots (y)$$

Donnons à présent dans les formules (x) et (y) à a successivement les valeurs $2a$ et $2a+1$; il vient

$$\int_0^\infty \frac{1-p\,Cos.\,sx}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^{2a}x}{q^2+x^2}\,dx = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\left[\frac{1}{2}(e^q+e^{-q})^{2a}\frac{p}{e^{sq}-p}+\frac{1}{2}\binom{2a}{a}+\right.$$

$$\left.+\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq}\right],\ s>2a;\ \ldots\ldots\ (179)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-p^2}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^{2a}x}{q^2+x^2}\,dx = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\left[(e^q+e^{-q})^{2a}\frac{p}{e^{sq}-p}+\frac{1}{2}\binom{2a}{a}+\right.$$

$$\left.+\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq}\right],\ s>2a;\ \ldots\ldots\ (180)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-p\,Cos.\,sx}{1-2p\,Cos.\,sx+p^2}\,\frac{Cos.^{2a+1}x}{q^2+x^2}\,dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left[\frac{1}{2}(e^q+e^{-q})^{2a+1}\frac{p}{e^{sq}-p}+\right.$$

$$\left.+\sum_0^a\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q}\right],\ s>2a+1;\ .\ (181)$$

$$\int_0^\infty \frac{1-p^2}{1-2p\,Cos.\,s\,x+p^2}\,\frac{Cos.^{2a+1}x}{q^2+x^2}\,dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^{2a+1}\frac{p}{e^{sq}-p}+$$

$$+\sum_0^a\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q}\Big],\ s>2a+1;\ .\ (182)$$

Analoguement aux intégrales (25), (157) et (160) l'on a trouvé encore les formules (45), (90) et (91): mais à ces dernières l'on ne peut pas appliquer cette méthode-ci, vu qu'il s'y trouve des sommations de fonctions d'Intégrales Exponentielles, et que l'on serait conduit à des sommations doubles, parce que dans l'état actuel de l'analyse l'on ne possède pas encore des formules pour l'addition de ces fonctions.

Du reste il ne faut pas perdre de vue, que dans toutes les formules de ce paragraphe, la valeur numérique de p ne doit pas surpasser l'unité, ou que p^2 doit rester moindre que l'unité. Mais il s'ensuit de là que le dénominateur dans toutes ces intégrales peut très-bien devenir

$$1+2p\,Cos.\,s\,x+p^2 \text{ au lieu de } 1-2p\,Cos.\,s\,x+p^2$$

puisque il n'y a qu'à prendre p négatif: dans ce cas dans les valeurs des intégrales p^a deviendra $(-p)^a$ et $e^{sq}-p$ de même $e^{sq}+p$. Toujours alors on garderait la condition: p^2 plus petit que l'unité.

Et cette condition que p^2 doit rester au dessous de l'unité, se laisse changer facilement dans la condition contraire, que p^2 doit toujours surpasser l'unité. Il faut seulement supposer $p=\frac{1}{p'}$: alors les dénominateurs sous le signe d'intégration gardent la même forme: car

$$1\pm 2p\,Cos.\,s\,x+p^2 = 1\pm\frac{2}{p'}Cos.\,s\,x+\frac{1}{p'^2} = \frac{1}{p'^2}\{1\pm 2p'\,Cos.\,s\,x+p'^2\}:$$

les puissances de p doivent être prises négativement, car $p^a=(p')^{-a}$, et enfin le dénominateur, qui se présente quelquefois dans les valeurs des intégrales, $e^{sq}\pm p$ devient $e^{sq}\pm\frac{1}{p'}=\frac{1}{p'}(p'e^{sq}\pm 1)$. Il n'y a donc aucune difficulté pour quadrupler le nombre des intégrales (167) à (182) pour $p=p,=-p,$ $=\frac{1}{p}$ et $=-\frac{1}{p}$; et nous laisserons cela au lecteur.

IV. DÉMONSTRATION DE QUELQUES THÉORÈMES GÉNÉRAUX SUR LES INTÉGRALES DÉFINIES GÉNÉRALES

$$\int_0^\infty F(x)\frac{Cos.^a x.Cos.px}{q^2+x^2}dx,\int_0^\infty F(x)\frac{Cos.^a x.Sin.px}{q^2+x^2}dx,\int_0^\infty F(x)\frac{Sin.^a x.Cos.px}{q^2+x^2}dx \text{ et } \int_0^\infty F(x)\frac{Sin.^a x\, Sin.px}{q^2+x^2}dx.$$

16. Les mêmes intégrales, qui ont servi dans le paragraphe 14, à déduire les théorèmes (A') à (D'), peuvent être employées aussi en application des formules générales (A) et (B). A cet effet il faut considérer, que l'on a trouvé dans les intégrales (21), (22) et (23):

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a} x}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\binom{2a}{a} + 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq},$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a} x.Cos.nsx}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a}e^{-nsq},\ ns \geqq 2a,$$

et

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1} x}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\sum_0^a\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q},$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1} x.Cos.nsx}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a+1}e^{-nsq},\ ns \geqq 2a+1;$$

et de ces deux paires de formules on peut déduire à présent, d'aprés le théorème (A), les équations suivantes:

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{Cos.^{2a} x}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left[A_0\left\{\binom{2a}{a}+2\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq}\right\}+(e^q+e^{-q})^{2a}\sum_1^c A_n e^{-nqs}\right],\ s \geqq 2a;\ \text{(P)}$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{Cos.^{2a+1} x}{q^2+x^2}dx = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\left[2A_0\sum_0^a\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q}+(e^q+e^{-q})^{2a+1}\sum_1^c A_n e^{-nqs}\right],\ s \geqq 2a+1;\ \text{(Q)}$$

Encore a-t-on d'aprés les formules (137) et (68)

$$\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a} x.Sin.nsx}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}e^{-nsq},\ ns > 2a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\},\ ns = 2a;$$

donc le théorème général (B) nous fournit ici:

$$\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.^{2a} x}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\sum_1^c B_n e^{-nsq},\ s > 2a;\ \ldots\ (R_1)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[B_1\left\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}+(e^q-e^{-q})^{2a}\sum_2^c B_n e^{-2nsq}\right],\ s = 2a;\ .\ (R_2)$$

Enfin on trouve par l'intermédiaire des formules (154), (160) et (69):

$$\int_0^\infty \frac{x \,Sin.^{2a+1} x \,d x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \, e^{-(2a+1)q} \Big\{ (1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big\}$$

$$\int_0^\infty \frac{x \,Sin.^{2a+1} x . Cos. \, n s x \, d x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \, (e^q - e^{-q})^{2a+1} e^{-nsq}\,,\ ns > 2a+1\,;$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \, \{(1-e^{-2q})^{2a+1} - 1\}\,,\ ns = 2a+1:$$

et l'on en déduit, par l'application de l'équation générale (A), les formules:

$$\int_0^\infty q_1(x) \frac{x \,Sin^{2a+1} x \,d x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[A_0 e^{-(2a+1)q} \Big\{ (1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big\} + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \sum_1^c A_n e^{-nsq} \Big]\,,\ s > 2a+1\,; \quad . \ (S_1)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[A_0 e^{-(2a+1)q} \Big\{ (1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big\} + A_1 \{(1-e^{-2q})^{2a+1} - 1\} + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \sum_2^c A_n e^{-(2a+1)nq} \Big]\,,\ s = 2a+1\,; \quad . \ . \ (S_2)$$

L'on peut ensuite satisfaire au théorème général (A) avec les mêmes intégrales à l'aide des suppositions suivantes:

$$f(x) = \frac{Cos.^a x . Cos. \, p x}{q^2+x^2}\,,\quad f(x) = \frac{x \,Sin.^{2a} x . Sin. \, p x}{q^2+x^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x \,Sin.^{2a+1} x . Cos. \, p x}{q^2+x^2}\,;$$

et de même au théorème général (B) lorsqu'on fait usage des suppositions

$$f(x) = \frac{Cos.^a x . Sin. \, p x}{q^2+x^2}\,,\quad f(x) = \frac{x \,Sin.^{2a} x . Cos. \, p x}{q^2+x^2} \quad \text{et} \quad f(x) = \frac{x \,Sin.^{2a+1} x . Sin. \, p x}{q^2+x^2}\,.$$

Alors on obtient d'abord:

$$\left.\begin{aligned}
\int_0^\infty q_1(x) \frac{Cos.^a x . Cos. \, p x \,d x}{q^2+x^2} &= A_0 \int_0^\infty \frac{Cos.^a x . Cos. \, p x \, d x}{q^2+x^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_1^c A_n \int_0^\infty Cos.^a x \, d x \, \frac{Cos. \{(ns-p)x\} + Cos \{(ns+p)x\}}{q^2+x^2} \\
\int_0^\infty q_2(x) \frac{Cos.^a x . Sin. \, p x \,d x}{q^2+x^2} &= \frac{1}{2} \sum_1^c B_n \int_0^\infty Cos.^a x \, d x \, \frac{Cos. \{(ns-p)x\} - Cos. \{(ns+p)x\}}{q^2+x^2} \\
\int_0^\infty q_1(x) \frac{x \,Sin^{2a} x . Sin. \, p x \,d x}{q^2+x^2} &= A_0 \int_0^\infty \frac{x \,Sin.^{2a} x . Sin. \, p x \, d x}{q^2+x^2} \\
&\quad + \frac{1}{2} \sum_1^c A_n \int_0^\infty x \,Sin.^{2a} x \, d x \, \frac{Sin. \{(ns+p)x\} - Sin. \{(ns-p)x\}}{q^2+x^2}
\end{aligned}\right\} . (z)$$

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.^{2a}x.Cos.pxdx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\sum_1^c B_n\int_0^\infty x\,Sin.^{2a}x\,dx\,\frac{Sin.\{(ns+p)x\}+Sin.\{(ns-p)x\}}{q^2+x^2}\\
&\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = A_0\int_0^\infty \frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}\\
&\qquad\qquad + \frac{1}{2}\sum_1^c A_n\int_0^\infty x\,Sin.^{2a+1}x\,d\,x\,\frac{Cos.\{(ns-p)x\}+Cos\{(ns+p)x\}}{q^2+x^2}\\
&\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Sin.pxdx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\sum_1^c B_n\int_0^\infty x\,Sin.^{2a+1}x\,dx\,\frac{Cos.\{(ns-p)x\}-Cos.\{(ns+p)x\}}{q^2+x^2}
\end{aligned}\right\}.(z)$$

Ici donc de nouveau, comme dans la première partie, il faut principalement faire attention à la valeur de $ns-p$, et dans la suite de notre discussion on s'apercevra bientôt que ce n'est que cette valeur dont il faut tenir compte, à propos des limites, que nous devrons prendre pour cette différence $ns-p$.

Auprès des intégrales (25), (157) et (160), dont on aura à faire usage ici, leur valeur est la plus simple, quand $ns-p$ reste supérieur à a, $2a$, et $2a+1$ respectivement (où encore dans le premier cas il peut atteindre cette limite minimum de a): autrement pourtant, les formules suivantes, qui expriment la valeur de ces mêmes intégrales pour le cas, que $ns-p$ devienne inférieur à a, $2a$, et $2a+1$ respectivement, introduiraient des sommations, dont les limites dépendraient de la fonction $ns-p$ elle-même: ce qui donnerait lieu à des résultats, en général bien embarrassants. Afin qu'en effet l'on ne se trouve pas conduit à ces formules plus compliquées, il faut et il suffit, que les inéquations précédentes vaillent pour la plus petite valeur de n, c'est-à-dire pour n égal à l'unité: d'où il résulte pour $ns-p$ plus grand que ou égal à a, plus grand que $2a$ et que $2a+1$ les inéquations correspondantes; p plus grand que ou égal à $s+a$, plus grand que $s-2a$ et que $s-2a-1$. Lorsque cependant on veut faire usage encore des intégrales (68) et (69), les deux dernières inéquations se changent en telle sorte, que p peut atteindre les limites inférieures respectives $s-2a$ et $s-2a-1$, quand les inéquations, qui concernent $ns-p$, subissent le même changement, c'est-à-dire que cette fonction peut devenir égale à ses limites inférieures $2a$ et $2a+1$ respectivement. Dans ce cas on doit évaluer le seul terme correspondant de la sommation d'après ces dernières intégrales; on ne doit pourtant pas oublier, d'y ajouter le terme restant sous le signe de sommation pour l'unité comme

valeur de n, où donc $ns+p$ est respectivement égal à $2p+2a$ et à $2p+2a-1$, et cela en se servant des intégrales (157) et (160). Donc, lorsqu'on se contente de ces valeurs de $s-p$, les formules (z) acquiérent la forme:

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{\mathrm{Cos.}^a x.\mathrm{Cos.}\,px\,dx}{q^2+x^2} &= \mathrm{A}_0\,2^{-a-1}\frac{\pi}{q}e^{-pq}(e^q+e^{-q})^a \\ &+\frac{1}{2}\sum_1^c \mathrm{A}_n\,2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[e^{-(ns-p)q}+e^{-(ns+p)q}\right] \\ &= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[\mathrm{A}_0\,e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c \mathrm{A}_n\,e^{-nsq}\right]\end{aligned}\right\}, p\geqq a,\ s\geqq 2a;\ .\ (\mathrm{T}_1)$$

$$\begin{aligned}= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}\Big[\mathrm{A}_0\Big\{&(e^q+e^{-q})^a e^{-pq}-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\Big\} \\ &+(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c \mathrm{A}_n\,e^{-nsq}\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{T}_2)\end{aligned}$$

où $p<a$, $2p\leqq s$, et d le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$;

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{\mathrm{Cos.}^a x.\mathrm{Sin.}\,px\,dx}{q^2+x^2} &= \frac{1}{2}\sum_1^c \mathrm{B}_n\,2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[e^{-(ns-p)q}-e^{-(ns+p)q}\right] \\ &= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c \mathrm{B}_n\,e^{-nsq}\end{aligned}\right\}, p\leqq s-a;\ \ldots\ (\mathrm{U})$$

$$\left.\begin{aligned}\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,\mathrm{Sin.}^{2a} x.\mathrm{Sin.}\,px\,dx}{q^2+x^2} &= \mathrm{A}_0(-1)^a\,2^{-2a-1}\pi\,e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a} \\ +\frac{1}{2}\sum_1^c \mathrm{A}_n(-1)^a\,2^{-2a-1}&\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\left[e^{-(ns+p)q}-e^{-(ns-p)q}\right] \\ =(-1)^a\,2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}&\left[\mathrm{A}_0\,e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_1^c \mathrm{A}_n\,e^{-nsq}\right]\end{aligned}\right\}, p>2a,\ s>4a;\ \ldots\ldots\ldots\ (\mathrm{V}_1)$$

$$\left.\begin{aligned}=(-1)^a\,2^{-2a-1}\pi\Big[\mathrm{A}_0\Big\{&e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ -e^{(p-2a)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big\}&+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_1^c \mathrm{A}_n\,e^{-nsq}\Big]\end{aligned}\right\}, p<2a,\ 2p<s,\ p\text{ entier};\ \ldots\ldots\ (\mathrm{V}_2)$$

$$\left.\begin{aligned}=(-1)^a\,2^{-2a-1}\pi\Big[\mathrm{A}_0\Big\{&e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} \\ -e^{(p-2a)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big\}&+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_1^c \mathrm{A}_n\,e^{-nsq}\Big]\end{aligned}\right\}, p<2a,\ 2p<s,\ p\text{ fractionnaire};\ \ldots\ldots\ (\mathrm{V}_3)$$

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = A_0(-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a} \\ + A_1(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}-e^{-(2p+2a)q}(e^q-e^{-q})^{2a}\right] \\ \quad + (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq} \\ = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[-\frac{1}{2}A_1\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}\right. \\ \quad \left.+(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{A_0 e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\right\}\right]\end{array}\right\}, p=s-2a,\ 2p>s>4a;\ \ldots\ldots (V_4)$$

$$\left.\begin{array}{l} = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[A_0\left\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\right.\right. \\ \quad \left.-e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right\} \\ -\frac{1}{2}A_1\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\Big]\end{array}\right\}, p=s-2a,\ 2p<s<4a;\ p \text{ entier.} \ \ldots (V_5)$$

$$\left.\begin{array}{l} = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[A_0\left\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}\right.\right. \\ \quad \left.-e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right\} \\ -\frac{1}{2}A_1\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\Big]\end{array}\right\}, p=s-2a,\ 2p<s<4a;\ p \text{ fractionnaire.} \ \ldots (V_6)$$

Dans ces formules d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a-\frac{1}{2}p)$.

$$\left.\begin{array}{l}\int_0^\infty \varphi_2(x)\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,p\,x\,dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\sum_1^c B_n(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\left[e^{-(ns-p)q}+e^{-(ns+p)q}\right] \\ \quad = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c B_n e^{-nsq}\end{array}\right\}, p<s-2a;\ \ldots (W_1)$$

$$\left.\begin{array}{l} = \frac{1}{2}B_1\left[(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(-1)^a 2^{-2a-1}\pi e^{-(2p+2a)q}(e^q-e^{-q})^{2a}\right. \\ \quad + (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c B_n e^{-nsq} \\ = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[\frac{1}{2}B_1\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c B_n e^{-nsq}\right]\end{array}\right\}, p=s-2a;\ \ldots (W_2)$$

$$\int_0^\infty \varphi_1(x)\frac{x\,\mathrm{Sin}^{2a+1}x.\,\mathrm{Cos}.\,px\,dx}{q^2+x^2}=A_0(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_1^c A_n(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left[e^{-(ns+p)q}+e^{-(ns-p)q}\right]$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left[A_0e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c A_n e^{-nsq}\right]$$

$, p>2a+1,\ s>4a+2;\ \ldots\ (X_1)$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Bigg[A_0\Bigg\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}$$
$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Bigg\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c A_n e^{-nsq}\Bigg]$$

$p<2a+1,\ 2p<s, p$ entier; . (X_2)

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Bigg[A_0\Bigg\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}$$
$$-e^{(p-2a-1)}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Bigg\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_1^c A_n e^{-nsq}\Bigg]$$

$, p<2a+1,\ 2p<s, p$ fractionnaire; $\ldots\ (X_3)$

$$=A_0(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}+\frac{1}{2}A_1(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}$$
$$+e^{-(2p+2a+1)q}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big]+(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[\frac{1}{2}A_1\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}$$
$$+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{A_0e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\Big\}\Big]$$

$, p=s-2a-1,\ 2p>s>4a+2;\ \ldots\ (X_4)$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Bigg[A_0\Bigg\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}$$
$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Bigg\}$$
$$+\frac{1}{2}A_1\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\Bigg]$$

$, p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p$ entier; . (X_5)

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Bigg[A_0\Bigg\{e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}$$
$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Bigg\}$$
$$+\frac{1}{2}A_1\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\sum_2^c A_n e^{-nsq}\Bigg]$$

$, p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p$ fractionnaire; $\ldots\ (X_6)$

Ici l'on a d le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1-p)$.

$$\int_0^\infty \varphi_2(x) \frac{x \operatorname{Sin}.^{2a+1} x . \operatorname{Sin} px dx}{q^2+x^2} = \frac{1}{2}\sum_1^c B_n (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi (e^q - e^{-q})^{2a+1}\left[e^{-(ns-p)q} - e^{-(ns+p)q}\right] \Bigg\} , p < s-2a-1;$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi (e^q - e^{-q})^{2a+1}(e^{pq} - e^{-pq}) \frac{1}{2}\sum_1^c B_n e^{-nsq} \Bigg\} \quad \ldots . (\Upsilon_1)$$

$$= \frac{1}{2} B_1 \Big[(-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi \{(1-e^{-2q})^{2a+1} - 1\} - (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi e^{-(2p+2a+2)q}(e^q - e^{-q})^{2a+1}$$

$$+ (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi (e^q - e^{-q})^{2a+1}(e^{pq} - e^{-pq}) \frac{1}{2}\sum_2^c B_n e^{-nsq}\Big] \Bigg\} , p = s-2a-1;$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi \Big[\frac{1}{2} B_1 \{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 1\} \quad \ldots . (\Upsilon_2)$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a+1}(e^{pq} - e^{-pq}) \frac{1}{2}\sum_2^c B_n e^{-nsq}\Big] \Bigg\}$$

A l'égard des limites pour les constantes, qui se trouvent dans ces formules, et entre lesquelles seulement ces formules valent, on les a déduites d'après les considérations suivantes. Dans l'intégrale (T_1) le coefficient de A_0 a été déduit de la formule (25) où p doit être $\geqq a$; donc, parce qu'aussi p est $\leqq s-a$, on a encore $2a-s \geqq 0$: dans l'intégrale (T_2) on a fait usage de (24) dans le même but; et puisque p y doit rester moindre que a, on combinera cette inéquation avec l'autre $p \leqq s-a$, pour en tirer $2p \leqq s$.

Pour la formule (U) il n'y a que la condition $p \leqq s-a$, qui y est nécessaire.

Auprès des intégrales (V_1) et (V_4) le coefficient de A_0 est déterminé d'après la formule (157), comme auprès des intégrales (V_2) et (V_5) d'après l'équation (158) et pour les formules (V_3) et (V_6) d'après l'intégrale (159): de sorte que dans ces deux dernières intégrales (V_3) et (V_6) p est fractionnaire, tandis que p est entier dans les deux précédentes (V_2) et (V_5). De plus, dans l'intégrale (V_1) on sait que p est plus grand que $2a$, donc, si l'on a égard à la condition que p est plus petit que $s-2a$, il s'ensuit que s doit être plus grand que $4a$: pour les intégrales (V_2) et (V_3) on a p plus petit que $2a$, donc, puisque aussi p est moindre que $s-2a$, on a $2p$ plus petit que s: dans la formule (V_4) p doit rester au dessus de $2a$ et être en même temps égal à $s-2a$, de sorte que l'on a $2p$ plus grand que s, et $4a$ plus grand que s; pour les intégrales (V_5) et (V_6) enfin on a la condition que p reste au dessous de $2a$, mais encore on sait que p est égal à $s-2a$, donc il s'ensuit que $2p$ soit moindre que s et que s soit moindre que $4a$.

Les intégrales (W_1) et (W_2) valent respectivement pour p plus petit que $s-2a$ et p égal à $s-2a$.

Dans les intégrales (X_1) et (X_4) la formule (160) est employée pour trouver le coefficient de A_0; de même la formule (161) dans les intégrales (X_2) et (X_5) et la formule (162) dans les intégrales (X_3) et (X_6): il s'ensuit que les deux dernières (X_3) et (X_6) supposent p fractionnaire, celles qui précèdent, c'est-à dire (X_2) et (X_5) au contraire éxigent que p soit entier. Ensuite dans l'intégrale (X_1) on a p plus grand que $2a+1$ et encore p moindre que $s-2a-1$, de sorte que s doit surpasser $4a+2$; dans les intégrales (X_2) et (X_3) p doit être plus petit que $2a+1$ et encore plus petit que $s-2a-1$; donc $2p$ doit être inférieur à s; dans l'intégrale (X_4) on a p plus grand que $2a+1$, mais on a aussi p égal à $s-2a-1$, donc par conséquence encore $2p$ plus grand que s et s plus petit que $4a+2$; auprès des intégrales (X_5) et (X_6) enfin on a la condition que p soit plus petite que $2a+1$, mais en même temps p est égal a $s-2a-1$, donc il faut que s surpasse $2p$, et que s reste inférieur à $4a+2$.

En dernier lieu les intégrales (Y_1) et (Y_2) valent pour p moindre que $s-2a-1$ et pour p égal à $s-2a-1$ respectivement.

Ces diverses conditions, auxquelles les quantités p et s sont assujetties mutuellement et à l'égard de la troisième a, nécessitent, d'âpres des discussions antérieures, qu'auprès des intégrales V_4, V_5, V_6, W_2, X_4, X_5, X_6 et Y_2 la sommation depuis l'unité jusques à c doit être décomposée dans une sommation depuis 2 à c et dans le seul terme détaché, qui vaille pour la valeur de n l'unité: et ce terme acquiert chaque fois une valeur spéciale, comme coefficient de A_1 ou de B_1 respectivement.

Ces vingt-trois équations (P) à (Y) constituent de nouveau autant de théorèmes différents, qui ont la supposition (a) pour base commune avec les théorèmes, que l'on a déduits aux paragraphes 2 à 4 de la première partie. Elles pourvoient à chaque cas spécial, où l'on doit en faire usage, selon qu'il en est éxigé dans les applications. L'on s'aperçoit qu'elles ne dépendent que de la sommation bien simple $\sum_1^c e^{-nq}$.

Mais il est rémarquable que, lorsqu'on suppose des autres équations de condition entre les éléments p, s et a mutuellement, ces mêmes integrales, qui se trouvent ici dans les formules (P) à (Y), dépendent de sommations doubles, extrêmement compliquées, en ce que la forme de l'une sommation, dépend des limites de l'autre, tandis que le terme qui doit être sommé, est fonction de l'Intégrale Ex-

ponentielle. Cette remarque met en évidence, il me semble, la nécessité de la marche plus ou moins indirecte de cette méthode, que nous avons suivie dans les parties première et troisième, d'où il résulte que la valeur d'une intégrale définie peut différer de beaucoup quand les circonstances changent à l'égard de la dépendance mutuelle des constantes, qu'elle renferme.

V. APPLICATIONS DE CES DERNIERS THÉORÈMES.

17. Pour l'application des formules générales (P) à (Y) nous pouvons supposer en premier lieu

$$\varphi_1(r) = \frac{1 - r\,Cos.\,s\,x}{1 - 2\,r\,Cos.\,sx + r^2} = \sum_0^\infty r^n\,Cos.\,n\,s\,x = 1 + \sum_1^\infty r^n\,Cos.\,ns.r,$$

ou plutôt

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1(r) &= \frac{1}{1 - 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2} = \frac{-1}{1 - r^2} + \frac{2}{1 - r^2}\sum_1^\infty r^n\,Cos.\,n\,s\,x \\
\varphi_1(r) &= \frac{Cos.\,s\,x}{1 - 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2} = \frac{1}{r}\,\frac{-1}{1 - r^2} + \frac{1}{r}\,\frac{1 + r^2}{1 - r^2}\sum_1^\infty r^n\,Cos.\,n\,s\,x \\
\varphi_2(r) &= \frac{Sin.\,s\,x}{1 - 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2} = \frac{1}{r}\sum_1^\infty r^n\,Sin.\,n\,s\,x
\end{aligned}\right\}\ ;\ r^2 < 1\,;\ \ldots\ldots\ldots (aa)$$

On a déjà traité de ces formules au paragraphe **14**: voyez-là les équations (u). Ici donc on a respectivement:

$$A_0 = \frac{1}{1 - r^2}\ ,\ A_0 = \frac{1}{r}\,\frac{-1}{1 - r^2}\ ;$$

$$A_n = \frac{2\,r^n}{1 - r^2}\ ,\ A_n = \frac{1}{r}\,\frac{1 + r^2}{1 - r^2}\,r^n\ ,\quad B_n = \frac{1}{r}\,.\,r^n\,.$$

Donc puisque

$$\sum_1^\infty r^n\,e^{-nqs} = \frac{r}{e^{qs} - r}\ ,\ \sum_2^\infty r^n\,e^{-nqs} = \frac{r^2\,e^{-qs}}{e^{qs} - r}\ ,\ \ldots\ldots\ldots (ab)$$

par l'intermédiaire des équations générales (P), (Q), (R) et (S) :

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}\,x}{1 - 2\,r\,Cos.\,sx + r^2}\,\frac{dx}{q^2 + x^2} = \frac{2^{-2a-1}}{1 - r^2}\,\frac{\pi}{q}\left[\binom{2a}{a} + 2\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq} + (e^q + e^{-q})^{2a}\,\frac{2r}{e^{qs} - r}\right],\ s \geqq 2a;$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}\,x.\,Cos.\,sx}{1 - 2rCos.\,sx + r^2}\,\frac{dx}{q^2 + x^2} = \frac{2^{-2a-1}}{1 - r^2}\,\frac{\pi}{q}\left[\frac{1 - r^2}{r}\left\{\binom{2a}{a} + 2\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq}\right\} + (e^q + e^{-q})^{2a}\,\frac{1 + r^2}{e^{qs} - r}\right],\ s \geqq 2a;\ (183)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}x}{1-2r Cos. s x+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-2a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\left[\sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q} + (e^q+e^{-q})^{2a+1}\frac{r}{e^{qs}-r}\right], s \geqq 2a+1;$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}x. Cos. s x}{1-2r Cos. s x+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-2a-2}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\left[2r\sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q} + (e^q+e^{-q})^{2a+1}\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\right], s \geqq 2a+1; \quad \ldots (184)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x. Sin. s x}{1-2r Cos. s x+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi (e^q-e^{-q})^{2a}\frac{1}{e^{qs}-r}, \; s>2a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[(1-e^{-2q})^{2a}-1+(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{r e^{-2aq}}{e^{2aq}-r}\right], \; s=2a; \quad \ldots (185)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[\frac{(e^q-e^{-q})^{2a}}{e^{2aq}-r}-1\right]$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x}{1-2r Cos. s x+r^2}\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} -$$

$$- 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{2r}{e^{qs}-r}\Big], \; s>2a+1;$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+$$

$$+ 2r\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{2r^2 e^{-(2a+1)q}}{e^{(2a+1)q}-r}\Big], \; s=2a+1;$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+ \quad \ldots (186)$$

$$+ 2r\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{e^{(2a+1)q}-r}-1\Big]$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x. Cos. s x}{1-2r Cos. s x+r^2}\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[r e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} -$$

$$- 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\Big], s>2a+1; \ldots (187)$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[r e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+$$

$$+ (1+r^2)\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\} + (e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{(1+r^2)\,r e^{-(2a+1)q}}{e^{(2a+1)q}-r}\Big], s=2a+1;$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(1+r^2)\Big\{\frac{(e^q-e^{-q})^{2a+1}}{e^{(2a+1)q}-r}-1\Big\} + \quad \ldots (188)$$

$$+ r e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1} - 2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}\Big]$$

Des quatre intégrales non numérotées, la première est déjà déduite dans la formule (180), la seconde dans la formule (182), la troisième dans la formule (176) et la quatrième dans la formule (178).

Ensuite les équations générales (T) à (N) nous fournissent les suivantes, lorsque nous employons les mêmes suppositions (aa) et les mêmes formules de réduction (ab) pour les sommations, qui se présentent ici.

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos.px}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{qs}-r}\right]$$
$$=\frac{2^{-a-1}}{1-r}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\frac{e^{(s-p)q}+re^{pq}}{e^{qs}-r}\quad ,2p\geqq 2a\leqq s;\ \ldots\ (189)$$

$$=\frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^a e^{-pq}-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}+$$
$$+(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{qs}-r}\Big]$$
$$=\frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\left[(e^q+e^{-q})^a\frac{e^{(s-p)q}-re^{pq}}{e^{qs}-r}-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}-e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\right]\quad ,2a>2p\leqq s;\ \ldots\ (190)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos\,px.Cos.sx}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-2}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[2re^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\right],2p\geqq 2a\leqq s;\ \ldots\ (191)$$

$$=\frac{2^{-a-2}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\Big[2r\Big\{(e^q+e^{-q})^a e^{-pq}-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\Big\}+$$
$$+(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\Big]\quad ,2a>2p\leqq s;\ \ldots\ (192)$$

Dans les intégrales (190) et (192) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$.

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Sin.px.Sin.sx}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{dx}{q^2+x^2}=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{e^{qs}-r}\ ,\ p\leqq s-a;\ .\ (193)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.px}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx=$$
$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\left[e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{r}{e^{qs}-r}\right]$$
$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{(s-p)q}-re^{pq}}{e^{qs}-r}\quad ,\ 2p>4a<s;\ \ldots\ (194)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a} x . Sin. p x}{1 - 2 r Cos. s x + r^2} \frac{x}{q^2 + x^2} dx =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - e^{(2a-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} -$$

$$- e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \frac{r}{e^{qs} - r} \Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \frac{e^{(s-p)q} - r e^{pq}}{e^{qs} - r} -$$

$$- e^{(2a-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big]$$

$, s > 2p < 4a,$ p entier; . . . (195)

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \frac{e^{(s-p)q} - r e^{pq}}{e^{qs} - r} - e^{(2a-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} -$$

$$- e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big]$$

$, s > 2p < 4a,$ p fractionnaire; . . . (196)

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[- r \{ (1 - e^{-2pq})(1 - e^{-2q})^{2a} - 1 \} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ e^{-pq} + (e^{-pq} - e^{pq}) \frac{r^2 e^{-qs}}{e^{qs} - r} \Big\} \Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ e^{-pq} - r \frac{e^{pq} - e^{-pq}}{e^{(p+2a)q} - r} \Big\} + r \Big]$$

$, p = s - 2a,$ $2p > s > 4a;$ . . . (197)

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - e^{(2a-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} -$$

$$- e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} - r \{ (1 - e^{-2pq})(1 - e^{-2q})^{2a} - 1 \} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \frac{r^2 e^{-qs}}{e^{qs} - r} \Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ e^{-pq} - r \frac{e^{pq} - e^{-pq}}{e^{(p+2a)q} - r} \Big\} +$$

$$+ r - e^{(2a-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big]$$

$, p = s - 2a,$ $2p < s < 4a,$ p entier; . . . (198)

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a} \Big\{ e^{-pq} - r \frac{e^{pq} - e^{-pq}}{e^{(p+2a)q} - r} \Big\} +$$

$$+ r - e^{(2a-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} \Big]$$

$, p = s - 2a,$ $2p < s < 4a,$ p fractionnaire; . . . (199)

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x.\,Cos.\,s\,x}{1-2\,r\,Cos.\,s\,x+r^2}\,\frac{x}{q^2+x^2}\,d\,x = (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\frac{\pi}{1-r^2}\,(e^q-e^{-q})^{2a}\Big[2\,r\,e^{-pq}+$$

$$+\;(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}\Big]\;,\;2p>4a<s;\;\ldots\ldots(200)$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}+2\,r\Big\{(e^q-e^{-q})^{2a}e^{-pq}-$$

$$-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big\}\Big],\;s>2p<4a,\,p\text{ entier};\;.\;(201)$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1+r^2}{e^{qs}-r}+2\,r\Big\{(e^q-e^{-q})^{2a}e^{-pq}-$$

$$-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big\}\Big],\;s>2\,p<4\,a,\,p\text{ fract.};\;.\;(202)$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-1}\,\frac{\pi}{1-r^2}\Big[-(1+r^2)\frac{1}{2}\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+$$

$$+\;(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{r\,e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1+r^2}{2}\,\frac{r\,e^{-sq}}{e^{sq}-r}\Big\}\Big]\;,\;p=s-2\,a,\;2\,p>s>4\,a;$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{2\,r\,e^{-pq}-\qquad\ldots\ldots(203)$$

$$-(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1+r^2}{e^{(p+2a)q}-r}\Big\}+2(1+r^2)\Big]$$

$$=(-1)^a2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{2\,r\,e^{-pq}-(e^{pq}-e^{-pq})\,\frac{1+r^2}{e^{(p+2a)q}-r}\Big\}+\qquad,\;2p<s<4a,\;p=s-2\,a,\;p\text{ entier},$$

$$+2\,(1+r^2)-2\,r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{-2nq}-2\,r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{2nq}\Big]\;\ldots\ldots(204)$$

$$=(-1)^a2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{2\,r\,e^{-pq}-(e^{pq}-e^{-pq})\,\frac{1+r^2}{e^{(p+2a)q}-r}\Big\}+\qquad,\;2\,p<s<4a,\;p=s-2\,a,\;p\text{ fractionnaire};$$

$$+2(1+r^2)-2\,r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{-2nq}-2\,r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2\,a}{n}e^{2nq}\Big]\;\ldots\ldots(205)$$

Dans les intégrales (195) à (205) d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a-\frac{1}{2}p)$.

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Cos.\,p\,x.\,Sin.\,s\,x}{1-2\,r\,Cos.\,s\,x+r^2}\,\frac{x}{q^2+x^2}\,dx=(-1)^a2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{e^{qs}-r}\;,\;p<s-2a;\;\ldots(206)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Cos.px.Sin.sx}{1-2r\,Cos.x+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{r}\Big[\frac{1}{2}r\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\frac{r^2 e^{-(p+2a)q}}{e^{(p+2a)q}-r}\Big], \quad p=s-2a; \quad \ldots (207)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{e^{(p+2a)q}-r}-1\Big]$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.px}{1-2r\,Cos.sx+r^2}\frac{x}{q^2+x^2}dx =$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big[e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{qs}-r}\Big], \quad 2p>4a+2<s; \quad \ldots\ldots (208)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{(s-p)q}+r\,e^{pq}}{e^{qs}-r}$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{(s-p)q}+r\,e^{pq}}{e^{qs}-r}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big], \quad s>2p<4a+2, \ p \text{ entier}; \quad \ldots (209)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{(s-p)q}+r\,e^{pq}}{e^{qs}-r}-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$

$$-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big], \quad s>2p<4a+2, \ p \text{ fractionnaire}; \quad \ldots (210)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[r\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r^2 e^{-sq}}{e^{qs}-r}\Big\}\Big], \quad 2p<s<4a+2, \ p=s-2a-1; \quad \ldots\ldots (211)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Big\}-r\Big]$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[e^{-(p-2a-1)q}(1-e^{-2q})^{2a+1}-$$

$$-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+ \quad 2p<s<4a+2, \ p=s-2a-1, \ p \text{ entier};$$

$$+r\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{r^2 e^{-(p+2a+1)q}}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Big]$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Cos. p x}{1 - 2 r Cos. s x + r^2} \frac{x}{q^2 + x^2} dx =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Bigg[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \left\{ e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{r}{e^{(p+2a+1)q} - r} \right\} - r -$$
$$- e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} - e^{(p-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Bigg]$$

$2p < s < 4a+2$, $p = s - 2a - 1$, p entier; . . . . . . (212)

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Bigg[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \left\{ e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{r}{e^{(p+2a+1)q} - r} \right\} - r -$$
$$- e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} - e^{(p-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Bigg]$$

$2p < s < 4a+2$, $p = s - 2a - 1$, p fractionnaire; . . . . . . (213)

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Cos. p x . Cos. s x}{1 - 2 r Cos. s x + r^2} \frac{x}{q^2 + x^2} dx = (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1-r^2} (e^q - e^{-q})^{2a+1} \Bigg[2 r e^{-pq} +$$
$$+ (e^{pq} - e^{-pq}) \frac{1+r^2}{e^{qs} - r} \Bigg]$$

$2p > 4a+2 < s$; . . (214)

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1-r^2} \Bigg[(e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{1+r^2}{e^{qs} - r} + 2r \Big\{ e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} -$$
$$- e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} - e^{(p-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big\} \Bigg]$$

$s > 2p < 4a+2$, p entier; . . (215)

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1-r^2} \Bigg[(e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{1+r^2}{e^{qs} - r} + 2r \Big\{ e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} -$$
$$- e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} - e^{(p-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Bigg] \Big\}$$

$s > 2p < 4a+2$, p fractionnaire; . (216)

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1-r^2} \Bigg[(1+r^2) \{ (1 + e^{-2pq}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1 \} +$$
$$+ (e^q - e^{-q})^{2a+1} \left\{ 2 r e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq}) (1+r^2) \frac{r e^{-sq}}{e^{qs} - r} \right\} \Bigg]$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1-r^2} \Bigg[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \left\{ 2 r e^{-pq} + (1+r^2) \frac{e^{pq} + e^{-pq}}{e^{(p+2a+1)q} - r} \right\} - (1+r^2) \Bigg]$$

$p = s - 2a - 1$, $2p > s > 4a+2$; . . . . . . (217)

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1-r^2} \Bigg[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \left\{ 2 r e^{-pq} + (1+r^2) \frac{e^{pq} + e^{-pq}}{e^{(p+2a+1)q} - r} \right\} -$$
$$- (1+r^2) + 2r \Big\{ e^{-(p-2a-1)q} (1 - e^{-2q})^{2a+1} - e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$
$$- e^{(p-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big\} \Bigg]$$

$p = s - 2a - 1$, $2p < s < 4a+2$, p entier; . . . . (218)

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.px.Cos.sx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{2re^{-pq}+$$
$$+(1+r^2)\frac{e^{pq}+e^{-pq}}{e^{(p+2a+1)q}-r}\Big\}-(1+r^2)+2r\Big\{e^{-(p-2a-1)q}(1-e^{-2q})^{2a+1}-$$
$$-e^{(2a+1-p)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}\Big]$$
$$p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p \text{ fractionnaire}; \quad \ldots\ldots (219)$$

Dans ces intégrales (209) jusques à (219) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}\,(2a+1-p)$.

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Sin.\,p\,x.\,Sin.\,s\,x}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x}{q^2+x^2}\,dx=$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{e^{qs}-r},\ p<s-2a-1; \ldots (220)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{r}\Big[\frac{1}{2}r\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+$$
$$+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{2r}\frac{r^2e^{-qs}}{e^{qs}-r}\Big]$$
$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{(e^{pq}-e^{-pq})}{e^{(p+2a+1)q}-r}-1\Big]$$
$$p=s-2a-1; \quad \ldots\ldots\ldots (221)$$

De ce dernier groupe d'intégrales (189) à (221) on peut déduire encore des résultats remarquables, en combinant quelques unes de ces intégrales, entre lesquelles il existe une certaine analogie, par voie d'addition et de soustraction.

Ainsi la somme et la différence des intégrales (191) et (192) avec (195) nous fournissent:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos.\{(s+p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\Big[e^{-pq}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big)+\frac{r^2e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big],\ p\leqq s-a,\ 2p\geqq 2a\leqq s;$$

$$=\frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^a\Big\{e^{-pq}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big)+\frac{r^2e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-$$
$$-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\Big],\ p\leqq s-a,\ 2a>2p\leqq s;$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos.\{(s-p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\frac{r\,e^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r},\ p\leqq s-a,\ 2p\geqq 2a\leqq s;$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x . Cos. \{(s-p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^a\,\frac{r\,e^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r} -$$

$$- e^{(a-p)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + e^{(p-a)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}\Big],\ p \leqq s-a,\ 2a > 2p \leqq s:$$

Dans ces formules d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$.

Lorsqu'on prend t pour $s+p$ dans les deux premières formules, ainsi que pour $s-p$ dans les deux dernières, alors les intégrales elles-mêmes acquièrent bien la même forme, mais les résultats diffèrent à raison des inéquations, auxquelles t, s et a sont assujettis, et qui les lient entre eux mutuellement; ces conditions peuvent facilement s'établir à l'aide des inéquations qui ont lieu entre p, s et a, et l'on y a ajouté la première, qui est quelque fois une conséquence nécessaire des deux autres, afin de montrer plus clairement la différence, qui y existe. Il vient:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x . Cos.\,tx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{dx}{q^2+x^2} = \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\Big\{e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big) +$$

$$+ e^{(t-s)q}\,\frac{r^2}{e^{qs}-r}\Big\},\ t \leqq 2s-a,\ s \geqq 2a,\ t \geqq s+a \quad . \ (222)$$

$$= \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^a\Big\{e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big) + e^{(t-s)q}\,\frac{r^2}{e^{qs}-r}\Big\} -$$

$$- e^{(a+s-t)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} + e^{(t-s-a)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}\Big] \quad \ldots\ldots\ldots \ (223)$$

où d est le plus grand nombre contenu dans $\frac{1}{2}(a+s-t)$, $t \leqq 2s-a$, $2t \leqq 3s$, $t < s+a$.

$$= \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\,\frac{r\,e^{tq}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r},\ t \geqq a,\ s \geqq 2a,\ t \leqq s-a; \quad \ldots\ldots\ldots \ (224)$$

$$= \frac{2^{-a-1}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}\Big[(e^q+e^{-q})^a\,\frac{r\,e^{tq}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r} - e^{(a+t-s)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{-2nq} -$$

$$+ e^{(s-t-a)q}\sum_0^d \binom{a}{n} e^{2nq}\Big],\ t \geqq a,\ 2t \geqq 3s,\ t > s-a; \quad \ldots\ldots \ (225)$$

où d est le plus grand nombre contenu dans $\frac{1}{2}(a+t-s)$.

La somme et la différence des intégrales (200), (201) et (202) avec (206), et de même des intégrales (203), (204) et (205) avec (207) nous donnent:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.\{(s+p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)-\frac{r^2e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\},\quad p<s-2a,\ 2p>4a<s;$$

$$=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)-\frac{r^2e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}-r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right],\quad p<s-2a,\ s>2p<4a,\ p\text{ entier};$$

$$=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)-\frac{r^2e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}-r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right],\quad p<s-2a,\ s>2p<4a,\ p\text{ fractionnaire};$$

$$=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{r\,e^{-pq}\frac{e^{sq}-2r}{e^{sq}-r}+\frac{e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}+r^2\right],\quad p=s-2a,\ 2p>s>4a;$$

$$=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{r\,e^{-pq}\frac{e^{qs}-2r}{e^{qs}-r}+\frac{e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}+r^2-r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right],\quad p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p\text{ entier};$$

$$=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{r\,e^{-pq}\frac{e^{qs}-2r}{e^{qs}-r}+\frac{e^{pq}}{e^{qs}-r}\right\}+r^2-r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right],\quad p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p\text{ fractionnaire};$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.\{(s-p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{pq}-r\,e^{(s-p)q}}{e^{qs}-r},\quad p<s-2a,\ 2p>4a<s;$$

$$=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{pq}-r\,e^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}+r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right],\quad p<s-2a,\ s>2p<4a,\ p\text{ entier};$$

$$=(-1)^a2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{pq}-r\,e^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}+r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\right],\quad p<s-2a,\ s>2p<4a,\ p\text{ fractionnaire};$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.\{(s-p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{-pq}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}-r\Big)-$$

$$-\frac{r^2 e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-1\Big],\ p=s-2a,\,2p>s>4a;$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{-pq}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}-r\Big)-\frac{r^2 e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-1+$$
$$+r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\quad ,\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p\text{ entier};$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{-pq}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}-r\Big)-\frac{r^2 e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-1+$$
$$+r\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+r\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\quad ,\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p\text{ fractionnaire}:$$

Dans ces intégrales d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a-\frac{1}{2}p)$.

Lorsque nous prenons dans les six premières de ces équations t pour $s+p$, de même t pour $s-p$ dans les six dernières, alors la fonction intégrée devient de même forme, tandis que les inéquations différentes entre elles en indiquent les divers cas, pour lesquels chaque valeur spéciale peut exister. Ainsi l'on a:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,tx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\Big[e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big)-$$

$$-\frac{r^2 e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\Big],\ t>6a,\,s>4a,\,t>s+2a;\ \ldots\ldots\ (226)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big)-\frac{r^2 e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\Big\}-$$
$$-r\,e^{(2a+s-t)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(t-s-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\quad ,\ 2t<3s,\ t<2(s-a),\ t<s+2a,\ t-s\text{ entier};\ \ldots\ldots\ (227)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{(s-t)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\Big)-\frac{r^2 e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\Big\}-$$
$$-r\,e^{(2a+s-t)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(t-s-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]\quad ,\ 2t<3s,\ t<2(s-a),\ t<s+2a,\ t-s\text{ fractionnaire};\ .\ (228)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{r\,e^{(s-t)q}\frac{e^{qs}-2r}{e^{qs}-r}+\frac{e^{(t-s)q}}{e^{sq}-r}\Big\}+r^2\Big],\ t=2(s-a),\ s>4a;\ \ldots\ldots\ldots\ (229)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.\,Sin.\,tx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{r\,e^{(s-t)q}\frac{e^{qs}-2r}{e^{qs}-r}+\frac{e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\Big\}+$$
$$+r^2-r\,e^{(2a+s-t)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(t-s-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$, t=2(s-a), s<4a, t-s$ entier;. (230)

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{r\,e^{(s-t)q}\frac{e^{qs}-2r}{e^{qs}-r}+\frac{e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\Big\}+$$
$$+r^2-r\,e^{(2a+s-t)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-r\,e^{(t-s-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$, t=2(s-a), s<4a, t-s$ fractionnaire; . . . . (231)

Dans les formules (226) à (231) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+s-t)$.

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{(s-t)q}-r\,e^{tq}}{e^{qs}-r}\,,\quad t>2a, s>4a, t<s-2a;$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{(s-t)q}-r\,e^{tq}}{e^{qs}-r}+r\,e^{(2a+t-s)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+$$
$$+r\,e^{(s-t-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big],\quad t>2a, 2t>s, t>s-2a, t-s \text{ entier}; (232)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{(s-t)q}-r\,e^{tq}}{e^{qs}-r}+r\,e^{(2a+t-s)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+$$
$$+r\,e^{(s-t-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big], t>2a, 2t>s, t>s-2a, t-s \text{ fractionnaire}; (233)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{(t-s)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}-r\Big)-\frac{r^2 e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}\Big\}-1\Big], t=2a, s>4a; \;. . . . . (234)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{(t-s)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}-r\Big)-\frac{r^2 e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}\Big\}-$$
$$-1+r\,e^{(2a+t-s)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+r\,e^{(s-t-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$, t=2a, s<4a, t-s$ entier; (235)

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\Big\{e^{(t-s)q}\Big(\frac{1}{e^{qs}-r}-r\Big)-\frac{r^2 e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}\Big\}-$$
$$-1+r\,e^{(2a+t-s)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}+r\,e^{(s-t-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$
$, t=2a, s<4a, t-s$ fractionnaire; . . . . . . (236)

Dans les intégrales (232) à (236) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}$ $(2a + t - s)$.

L'équation non numérotée, qui se trouve entre les deux intégrales (231) et (232) a déjà été déduite dans la formule (194). Lorsqu'on compare ces résultats des formules (226) à (236) avec les autres déjà trouvés précédemment dans les formules (194) à (199) pour la même intégrale, on voit qu'elle est évaluée par conséquence dans dix-sept cas différens, qui dépendent de relations mutuelles très-variées entre les élémens t, s et a. Voilà certainement un exemple bien remarquable, de quelle importance les valeurs spéciales des constantes sous le signe d'intégration peuvent être quelquefois à l'égard de la valeur d'une intégrale définie, et combien on a besoin de circonspection, lorsqu'on veut décider précisement pour quelles limites d'une constante quelconque une intégrale définie acquierre une valeur donnée; nos théorèmes offrent des mesures de précaution à cet effet, que l'on n'a parfois que trop négligées. Un second exemple pour l'application de ces observations se trouve encore dans l'intégrale suivante.

Lorsqu'on combine les intégrales (220) avec les autres (214), (215) et (216) par la voie d'addition et de soustraction, et encore de même l'intégrale (221) avec les autres (217), (218) et (219), l'on obtient:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.\{(s+p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big[e^{-pq}\Big(r+\frac{1}{e^{qs}-r}\Big)+$$

$$+\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big],\ p<s-2a-1,\ 2p>4a+2<s;$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{e^{-pq}\Big(r+\frac{1}{e^{qs}-r}\Big)+\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-$$
$$-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big],\ p<s-2a-1,\ s>2p<4a+2,\ p \text{ entier};$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{e^{-pq}\Big(r+\frac{1}{e^{qs}-r}\Big)+\frac{r^2\,e^{pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-$$
$$-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big],\ p<s-2a-1,\ s>2p<4a+2,\ p \text{ fractionnaire};$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{r\,e^{-pq}+\frac{r^2\,e^{pq}+e^{-pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-r^2\Big],\ p=s-2a-1,\ 2p>s>4a+2;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\{(s+p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{re^{-pq}+\frac{r^2e^{pq}+e^{-pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-r^2-$$
$$-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$
$p=s-2a-1$, $2p<s<4a+2$, p entier;

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{re^{-pq}+\frac{r^2e^{pq}+e^{-pq}}{e^{qs}-r}\Big\}-r^2-$$
$$-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big]$$
$p=s-2a-1$, $2p<s<4a+2$, p fractionnaire:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\{(s-p)x\}}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{re^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r},\quad p<s-2a-1,\ 2p>4a+2<s;$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{re^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r}-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big],\quad p<s-2a-1,\ s>2p<4a+2,\ p\ \text{entier};$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{re^{(s-p)q}+e^{pq}}{e^{qs}-r}-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big],\quad p<s-2a-1,\ s>2p<4a+2,\ p\ \text{fractionnaire};$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{pq}+re^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}-1\Big],\quad p=s-2a-1,\ 2p>s>4a+2;$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{pq}+re^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}-1-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big],\quad p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p\ \text{entier};$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{pq}+re^{(s-p)q}}{e^{qs}-r}-1-re^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-re^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big],\quad p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p\ \text{fractionnaire};$$

Ici d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1-p)$.

Lorsqu'on prend de nouveau t pour $s+p$ dans les six premières formules et de même t pour $s-p$ dans les six dernières, l'on obtient ainsi douze expressions différentes pour la même intégrale, qui valent respectivement pour des valeurs différentes de t, c'est-à-dire:

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,tx}{1-2rCos.sx+r^2}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{e^{(s-t)q}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)+\right.$$
$$\left.+\frac{r^2e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\right\},\ t>6a+3,\ s>4a+2,\ t>s+2a+1\ \ldots\ (237)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{e^{(s-t)q}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)+\frac{r^2e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\right\}-\right.$$
$$\left.-re^{(2a+1+s-t)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(t-s-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right],\ 2t<3s,\ t<2s-2a-1,\ t<s+2a+1,\ t-s\ \text{entier};(238)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{e^{(s-t)q}\left(\frac{1}{e^{qs}-r}+r\right)+\frac{r^2e^{(t-s)q}}{e^{qs}-r}\right\}-\right.$$
$$\left.-re^{(2a+1+s-t)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(t-s-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right]\ 2t<3s,\ t<2s-2a-1,\ t<s+2a+1,\ t-s\ \text{fractionnaire:}\ .\ .\ (239)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{re^{(s-t)q}+\frac{r^2e^{(t-s)q}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}\right\}-r^2\right],\ t=2s-2a-1,\ s<4a+2;\ .\ (240)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{re^{(s-t)q}+\frac{r^2e^{(t-s)q}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}\right\}-r^2-\right.$$
$$\left.-re^{(2a+1+s-t)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(t-s-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right],\ t=2s-2a-1,\ s<4a+2,\ t-s\ \text{entier};\ .\ (241)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{re^{(s-t)q}+\frac{r^2e^{(t-s)q}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r}\right\}-r^2-\right.$$
$$\left.-re^{(2a+1+s-t)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-re^{(t-s-2a-1)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\right],\ t=2s-2a-1,\ s<4a+2,\ t-s\ \text{fractionnaire;}\ .\ .\ (242)$$

Dans les formules (237) à (242) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1+s-t)$.

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{re^{tq}+e^{(s-t)q}}{e^{qs}-r},\ t>2a+1,\ s>4a+2,\ t<s-2a-1;$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x.\ Cos.\, t x}{1 - 2 r\, Cos.\, s x + r^2} \frac{x\, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{r e^{tq} + e^{(s-t)q}}{e^{qs} - r} - r\, e^{(2a+1+t-s)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- r\, e^{(s-t-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big],\ t > 2a+1,\ 2t > s,\ t > s - 2a - 1,\ t - s \text{ entier}; \quad (243)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{r e^{tq} + e^{(s-t)q}}{e^{qs} - r} - r\, e^{(2a+1+t-s)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- r\, e^{(s-t-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big],\ t > 2a+1,\ 2t > s,\ t > s - 2a - 1,\ t - s \text{ fractionnaire}; \quad (244)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{e^{(s-t)q} + r e^{tq}}{e^{qs} - r} - 1 \Big],\ t = 2a+1,\ s > 4a+2 \ . \quad (245)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{e^{(s-t)q} + r e^{tq}}{e^{qs} - r} - 1 - r e^{(2a+1+t-s)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- r\, e^{(s-t-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big],\ t = 2a+1,\ s < 4a+2,\ t - s \text{ entier}; \ldots\ldots \quad (246)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \frac{\pi}{1-r^2} \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \frac{e^{(s-t)q} + r e^{tq}}{e^{qs} - r} - 1 - r e^{(2a+1+t-s)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- r\, e^{(s-t-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \Big],\ t = 2a+1,\ s < 4a+2,\ t - s \text{ fractionnaire}; \ . \quad (247)$$

où dans les intégrales (243) à (247) d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}\ (2a + 1 - s + t)$.

Lorsqu'on compare ces formules avec les intégrales précédemment déduites (208) à (215), on voit en premier lieu, que l'intégrale non numérotée ici (qui est placée entre les formules (242) et (243)) est identique avec la formule (208): encore voit-on que la fonction sous le signe d'intégration est la même, de sorte que les formules (208) à (215) conjointement avec ces dernières (237) à (247) nous fournissent dix-sept valeurs distinctes pour autant de suppositions différentes à l'égard de la dépendance mutuelle des constantes t, s et a, tout comme il a été annoncé antérieurement.

Dans toutes les intégrales (183) à (247) a doit être entier, tandis que p, q, s et t sont absolument arbitraires, en tant qu'ils ne sont liés chaque fois par des conditions spéciales: la valeur numérique de r au contraire est assujettie à la condition de rester toujours moindre que l'unité, puisque dans le cas contraire les formules (aa) ne vaudraient plus; mais par conséquence r

peut devenir négatif, et dans ce cas-là le dénominateur acquiert la forme correspondante

$$1 + 2r\,Cos.\,s\,x + r^2$$

avec la même équation de condition que r^2 doit rester au dessous de l'unité. Cela nous offre une occasion convenable, de prendre la somme ou la différence de deux intégrales semblables, qui ne diffèrent que par leurs dénominateurs respectifs, et d'en acquérir ainsi des nouvelles, qui ne contiennent plus des sommations à l'égard de a ou de d dans leurs valeurs correspondantes.

18. Car lorsqu'on a évalué une intégrale de la forme

$$\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1-2r\,Cos.\,s\,x+r^2} = f(r),\ \text{où}\ r^2<1:$$

on a de même encore:

$$\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1+2r\,Cos.\,s\,x+r^2} = f(-r),\ (r^2<1);$$

et par conséquence

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}+\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1+2r\,Cos.\,sx+r^2}=f(r)+f(-r)=2(1+r^2)\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1-2r^2\,Cos.\,2sx+r^4}\\
&\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}-\int_0^\infty \frac{F(x)\,dx}{1+2r\,Cos.\,sx+r^2}=f(r)-f(-r)=4r\int_0^\infty \frac{F(x)\,Cos.\,s\,x\,dx}{1-2r^2\,Cos.\,2sx+r^4}
\end{aligned}\right\}(ac)$$

Si l'on considère qu'en général on a

$$\frac{1}{m-r}-\frac{1}{m+r}=\frac{2r}{m^2-r^2}\ \text{et}\ \frac{1}{m-r}+\frac{1}{m+r}=\frac{2m}{m^2-r^2},$$

$$\frac{r}{m-r}-\frac{-r}{m+r}=\frac{2mr}{m^2-r^2}\ \text{et}\ \frac{r}{m-r}+\frac{-r}{m-r}=\frac{2r^2}{m^2-r^2},$$

les intégrales (183), (184), (185), (187), (188) nous fournissent les suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a}\,x.\,Cos.\,s\,x}{1-2r^2\,Cos.\,2\,s\,x+r^4}\,\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-2a-1}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a}\,\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2},\ s\geqq 2a;\\
&\int_0^\infty \frac{Cos.^{2a+1}\,x.\,Cos.\,s\,x}{1-2r^2\,Cos.\,2\,s\,x+r^4}\,\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-2a-2}}{1-r^2}\,\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a+1}\,\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2},\ s\geqq 2a+1;
\end{aligned}\right\}.\ (248)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.sx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1+r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}, s>2a; . (249)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\frac{\pi}{1+r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\frac{e^{2aq}}{e^{4aq}-r^2}-1\right], s=2a; . (250)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1}x.Cos.sx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}, s>2a+1; \quad . . . (251)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}-1\right], s=2a+1; . (252)$$

Les intégrales non numérotées là, ainsi que l'intégrale (186), auraient conduit aux mêmes résultats: les deux valeurs de l'intégrale (248) nous montre qu'ici la distinction entre la parité et l'imparité de a s'évanouit. De même manière les intégrales (189) et (190), tout comme les autres (191) et (192), les intégrales (193), (194) à (199), tout comme les autres (200) à (205), les intégrales (206) et (207), (208) à (213), tout comme les formules (214) à (219), les intégrales enfin (220), (221) nous fourniront:

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Cos.px.Cos.sx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-2}}{1-r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}\left.\begin{matrix}, 2p\geqq 2a\leqq s,\\ \text{ou } 2a\geqq 2p\leqq s;\end{matrix}\right\} . (253)$$

$$\int_0^\infty \frac{Cos.^a x.Sin.px.Sin.sx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{dx}{q^2+x^2}=\frac{2^{-a-2}}{1+r^2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}, p\leqq s-a; . (254)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a}x.Sin.px.Cos.sx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}\left.\begin{matrix}, 2p>4a<s,\\ \text{ou } s>2p<4a;\end{matrix}\right\} . (255)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1-r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}+1\right]\left.\begin{matrix}, p=s-2a\\ \text{et } 2p>s>4a,\\ \text{ou } 2p<s<4a;\end{matrix}\right\} . (256)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin^{2a}x.Cos.px.Sin.sx}{1-2r^2Cos.2sx+r^4}\frac{x\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1+r^2}(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}, p<s-2a; . (257)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\frac{\pi}{1+r^2}\left[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{e^{qs}}{e^{2qs}-r^2}-1\right], p=s-2a; . (258)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Cos. p x . Cos. s x}{1 - 2 r^2 \, Cos. 2 s x + r^4} \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1 - r^2} (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{e^{qs}}{e^{2qs} - r^2} , \left. \begin{matrix} 2p > 4a + 2 < s, \\ \text{ou } s > 2p < 4a + 2 ; \end{matrix} \right\} . (259)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1 - r^2} \left[(e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{e^{qs}}{e^{2qs} - r^2} - 1 \right] \left. \begin{matrix} , p = s - 2a - 1 \\ \text{et } 2p > s > 4a + 2 , \\ \text{ou } 2p < s < 4a + 2 ; \end{matrix} \right\} . (260)$$

$$\int_0^\infty \frac{Sin.^{2a+1} x . Sin. p x . Sin. s x}{1 - 2 r^2 \, Cos. 2 s x + r^4} \frac{x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1 + r^2} (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) \frac{e^{qs}}{e^{2qs} - r^2} , p < s - 2a - 1 ; . (261)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \frac{\pi}{1 + r^2} \left[(e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) \frac{e^{qs}}{e^{2qs} - r^2} - 1 \right] , p = s - 2a - 1 ; . (262)$$

Ici les cas auparavant distincts tombent pour la plupart ensemble: ainsi l'intégrale (253) est devenue la valeur commune de deux intégrales, comme les intégrales (255), (256), (259) et (260) même de trois autres. Les résultats sont devenus bien simples, en ce qu'ils ne contiennent plus de sommations. L'on pourrait prendre partout ici r' pour r^2, parce que sous le signe d'intégration r ne se trouve que d'une puissance paire et cela est devenu le cas de même dans les valeurs correspondantes. Or, puisque la valeur numérique de r doit rester moindre que l'unité, r' serait lui-même assujetti à la même condition, et ne saurait devenir négatif.

Mais tout comme au paragraphe 15, l'on pourrait très-bien évaluer toutes les intégrales (183) à (262) pour le cas où r^2 devrait toujours surpasser l'unité. On n'aurait qu'à prendre $\frac{1}{r'}$ au lieu de r, dont s'ensuivrait une même forme pour les fonctions sous le signe d'intégration, puisque

$$1 \pm 2 r \, Cos. s x + r^2 = 1 \pm \frac{2}{r'} Cos. s x + \frac{1}{r'^2} = \frac{1}{r'^2} (1 \pm 2 r' \, Cos. s x + r'^2) ,$$

et que c'est seulement dans ce dénominateur que r entre dans la fonction en question. Les valeurs aussi changeraient peu elles mêmes, parce que les puissances de r deviendraient négatives et que les dénominateurs $1 \pm r^2$ et $e^{qs} - r$ seraient remplacés par les nouveaux $\frac{1}{r'^2} (r'^2 \pm 1)$ et $\frac{1}{r'} (r' e^{qs} - 1)$.

19. La supposition suivante nous donne encore une application importante des formules (P) à (Y):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= e^{r\,Cos.sx}\,Cos.(r\,Sin.\,s\,x) = \sum_0^{\infty}\frac{r^n}{1^{n/1}}\,Cos.\,n\,s\,x \\ \varphi_2(x) &= e^{r\,Cos.sx}\,Sin.(r\,Sin.\,s\,x) = \sum_1^{\infty}\frac{r^n}{1^{n/1}}\,Sin.\,n\,s\,x \end{aligned}\right\},\ r^2 < \infty\ ; \ \ldots\ldots\ (ad)$$

Lorsqu'on les compare avec les formules (a) du paragraphe premier, on trouve que

$$A_0 = 1\ ,\ A_n = \frac{r^n}{1^{n/1}}\ ,\ B_n = \frac{r^n}{1^{n/1}}\ ,\ c = \infty\ .$$

Pour les sommations correspondantes on a toujours auprès de cette application:

$$\left.\begin{aligned} \sum_1^{\infty} A_n e^{-nsq} = \sum_1^{\infty} B_n e^{-nsq} = \sum_1^{\infty}\frac{r^n}{1^{n/1}}e^{-nsq} = \sum_1^{\infty}\frac{(re^{-sq})^n}{1^{n/1}} = -1 + \sum_0^{\infty}\frac{(re^{-sq})^n}{1^{n/1}} = e^{re^{-sq}} - 1 \\ \sum_2^{\infty} A_n e^{-nsq} = \sum_2^{\infty} B_n e^{-nsq} = \sum_2^{\infty}\frac{(re^{-sq})^n}{1^{n/1}} = -1 - re^{-sq} + \sum_0^{\infty}\frac{(re^{-sq})^n}{1^{n/1}} = e^{re^{-sq}} - 1 - re^{-sq} \end{aligned}\right\} . (ae)$$

Et ce sont les seules sommations qui se présentent, outre celles qui dépendent de a et qui par conséquence sont entièrement indépendantes de la forme des fonctions $\varphi_1(x)$ et $\varphi_2(x)$.

Afin d'être plus courts nous employerons tout de suite les résultats des formules (ae), lorsqu'on substitue les suppositions (ad) dans les théorèmes généraux (P) à (S). De telle sorte nous sommes conduits aux résultats, qui suivent:

$$\int_0^{\infty} e^{r\,Cos.sx}\,Cos.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{Cos.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\Big[\binom{2a}{a} + 2\sum_1^{a}\binom{2a}{n+a}e^{-2nq} +$$

$$+ (e^q + e^{-q})^{2a}(e^{re^{-qs}} - 1)\Big]\ ,\ s \geqq 2a\ ; \ \ldots\ldots\ (263)$$

$$\int_0^{\infty} e^{r\,Cos.sx}\,Cos.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{Cos.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\Big[2\sum_0^{a}\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q} +$$

$$+ (e^q + e^{-q})^{2a+1}(e^{re^{-qs}} - 1)\Big]\ ,\ s \geqq 2a+1\ ; \ \ldots\ (264)$$

$$\int_0^{\infty} e^{r\,Cos.sx}\,Sin.(r\,Sin.sx)\,\frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a}(e^{re^{-qs}} - 1)\ ,\ s > 2a\ ; . (265)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Sin.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a}\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\,\Big[r\,\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}\;+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{re^{-2aq}}-1-re^{-2aq})\Big] = (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{re^{-qs}}-1)-r\Big],\; s=2a;\;.\;(266)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}\,-$$

$$-\,2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{re^{-qs}}-1)\Big]\;,\; s>2a+1;\;\ldots\ldots\;(267)$$

$$\left.\begin{aligned}&=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+\\&\qquad+r\,\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,\{e^{re^{-(2a+1)q}}-1-re^{-(2a+1)q}\}\Big]\\&=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+\\&\qquad+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{re^{-(2a+1)q}}-1)-r\Big]\end{aligned}\right\}\; s=2a+1;\;..\;(268)$$

Tout de même il vient par l'intermédiaire des théorèmes (T) à (Y):

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{Cos.^a\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\,\frac{\pi}{q}\,(e^q+e^{-q})^a\Big[2\,e^{-pq}\,+$$

$$+\,(e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\Big]\;,\; p \geqq a,\; s\geqq 2a;\;\ldots\ldots\ldots\;(269)$$

$$=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}\Big[2\Big\{(e^q+e^{-q})^a\,e^{-pq}-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\Big\}+$$

$$+\,(e^q+e^{-q})^a\,(e^{pq}+e^{-pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\Big]\;,\; p<a,\; 2p\leqq s;\;.\;(270)$$

où d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$.

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Sin.\,(r\,Sin.\,sx)\,\frac{Cos.^a x.\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})(e^{re^{-sq}}-1)\;,\; p\leqq s-a;\;..\;(271)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a}\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} = (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\Big[2\,e^{-pq}\,+$$

$$+\,(e^{-pq}-e^{pq})\,(e^{re^{-sq}}-1)\Big]\;,\; p>2a,\; s>4a;\;\ldots\ldots\ldots\;(272)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[2\,e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-$$

$$-2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})(e^{re^{-qs}}-1)\Big]$$ $,p<2a,\ 2p<s,\ p$ entier; . (273)

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[2\,e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-$$

$$-2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})(e^{re^{-qs}}-1)\Big]$$ $,p<2a,\ 2p<s,\ p$ fractionnaire: . . . . . (274)

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[-\frac{1}{2}r\left\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}(e^{re^{-sq}}-1-r\,e^{-(p+2a)q}\right\}\Big]$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{2\,e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})(e^{re^{-sq}}-1)\right\}+r\Big]$$ $,\ p=s-2a,\ 2p>s>4a$: . . . . (275)

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{2\,e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})(e^{re^{-sq}}-1)\right\}+$$

$$+r-2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$ $,\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p$ entier; . . . . (276)

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{2\,e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})(e^{re^{-sq}}-1)\right\}+$$

$$+r-2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}\Big]$$ $,\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,\ p$ fractionnaire; . . . . . (277)

Ici d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a-\frac{1}{2}p)$.

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Sin.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})(e^{re^{-qs}}-1)\ ,\ p<s-2a;\ .\ .\ .\ .\ .\ (278)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[\frac{1}{2}r\left\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}(e^{re^{-qs}}-1-r\,e^{-(p+2a)q})\Big]=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})(e^{re^{-qs}}-1)-r\Big]\ ,\ p=s-2a;\ .\ (279)$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\, Cos.(r\, Sin.\, s x) \frac{x\, Sin.^{2a+1} x.\, Cos.\, p x\, d x}{q^2 + x^2} = \qquad , p > 2a+1,\ s < 4a+2;$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi (e^q - e^{-q})^{2a+1} \left[2 e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq})(e^{re^{-qs}} - 1)\right] \ldots\ldots (280)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \Big[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} - 2 e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- 2 e^{(p-2a-1)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) (e^{re^{-sq}} - 1)\Big] \qquad , p < 2a+1,\ 2p < s,\ p \text{ entier}; . (281)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \Big[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} - 2 e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$

$$- 2 e^{(p-2a-1)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) (e^{re^{-sq}} - 1)\Big] \qquad , p < 2a+1,\ 2p < s,\ p \text{ fractionnaire}; . (282)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[\frac{1}{2} r \{(1 + e^{-2pq})(1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1\} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a+1} \Big\{e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq}) \frac{1}{2} (e^{re^{-sq}} - 1 - r\, e^{-(p+2a+1)q})\Big\}\Big]$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \left[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \{2e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq})(e^{re^{-sq}} - 1)\} - r\right] \qquad , p = s - 2a - 1,\ 2p > s > 4a+2; \ldots\ldots (283)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \{2e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq})(e^{re^{-sq}} - 1)\} -$$

$$- r - 2e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} - 2 e^{(p-2a-1)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq}\Big] \qquad , p = s - 2a - 1,\ 2p < s < 4a+2,\ p \text{ entier}; . (284)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \Big[(e^q - e^{-q})^{2a+1} \{2e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq})(e^{re^{-sq}} - 1)\} -$$

$$- r - 2e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} - 2 e^{(p-2a-1)q} \sum_0^d (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq}\Big] \qquad , p = s - 2a - 1,\ 2p < s < 4a+2,\ p \text{ fractionnaire}; . (285)$$

Dans ces formules d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a + 1 - p)$.

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.sx}\, Sin.(r\, Sin.\, s x) \frac{x\, Sin.^{2a+1} x.\, Sin.\, p x\, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq})(e^{re^{-qs}} - 1),\ p < s - 2a - 1; . (286)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[\tfrac{1}{2} r \{(1 - e^{-2pq})(1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1\} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) \tfrac{1}{2} (e^{re^{-qs}} - 1 - r\, e^{-(p+2a+1)q})\Big]$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3} \pi \left[(e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} - e^{-pq}) (e^{re^{-sq}} - 1) - r\right] \qquad , p = s - 2a - 1; \ldots\ldots (287)$$

L'on pourrait encore déduire de ces divers résultats par leur addition et leur soustraction les intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Cos.\,(p \pm r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{Cos.^a x\,d\,x}{q^2+x^2}\;,\;\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Sin.\,(p \pm r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a} x\,d\,x}{q^2+x^2}\;,$$

$$\int_0^\infty e^{r\,Cos.\,sx}\,Cos.\,(p \pm r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1} x\,d\,x}{q^2+x^2}\;,$$

mais nous passerons outre, parce qu'elles ne donnent pas lieu à des résultats aussi intéressants qu'au paragraphe **17**.

Lorsqu'au contraire on prend en considération que ces formules (263) à (287) valent pour toutes les valeurs possibles de r, puisqu'il n'est assujetti qu'aux limites l'infini positif et négatif, il s'ensuit que l'on peut rendre r négatif; cette supposition changera le facteur $e^{r\,Cos.\,x}$ sous le signe d'intégration en $e^{-r\,Cos.\,x}$: et à présent l'on peut combiner les intégrales correspondantes par voie d'addition et de soustraction, où il peut arriver que les sommations s'annulent, qui dépendent de a ou de d; et ce sont seulement les résultats de ce genre là, que l'on transcrira ici:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty \left(e^{r\,Cos.\,sx} - e^{-r\,Cos.\,sx}\right) Cos.\,(r\,Sin.\,sx)\,\frac{Cos.^{2a} x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\ &\qquad = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left(e^q+e^{-q}\right)^{2a}\left(e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}\right)\;,\; s \geqq 2a;\\ &\int_0^\infty \left(e^{r\,Cos.\,sx} - e^{-r\,Cos.\,sx}\right) Cos.\,(r\,Sin.\,sx)\,\frac{Cos.^{2a+1} x\,d\,x}{q^2+x^2} = \\ &\qquad = 2^{-2a-2}\frac{\pi}{q}\left(e^q+e^{-q}\right)^{2a+1}\left(e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}\right), s \geqq 2a+1;\end{aligned}\right\}\ldots (288)$$

$$\int_0^\infty \left(e^{r\,Cos.\,sx} - e^{-r\,Cos.\,sx}\right) Sin.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a} x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\left(e^q-e^{-q}\right)^{2a}\left(e^{re^{-qs}} + e^{-re^{-qs}} - 2\right)\;,\; s > 2a;\;\ldots\ldots (289)$$

$$\int_0^\infty \left(e^{r\,Cos.\,sx} - e^{-r\,Cos.\,sx}\right) Cos.\,(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1} x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left(e^q-e^{-q}\right)^{2a+1}\left(e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}\right)\;,\; s > 2a+1;\;\ldots (290)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\left[\left(e^q-e^{-q}\right)^{2a+1}\left(e^{re^{-qs}} - e^{-re^{-qs}}\right) - 2r\right], s = 2a+1;.(291)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\, Cos.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{Cos.^a x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})(e^{re^{-qs}}-e^{-re^{-qs}})\;\left.\begin{matrix}, p \geqq a, s \geqq 2a;\\ \text{ou } p < a, 2p \leqq s;\end{matrix}\right\} \;.\;(292)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\, Sin.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{Cos.^a x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= 2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})(e^{re^{-qs}}+e^{-re^{-qs}}-2)\;,\; p \leqq s-a;\;.\;(293)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\, Cos.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a} x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})(e^{re^{-sq}}-e^{-re^{-sq}})\;\left.\begin{matrix}, p > 2a, s < 4a;\\ \text{ou } p < 2a, 2p < s;\end{matrix}\right\} \;.\;(294)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\left[(e^{-pq}-e^{pq})(e^{re^{-qs}}-e^{-re^{-qs}})+2r\right]\;\left.\begin{matrix}, p = s-2a,\\ \text{et } 2p > s > 4a,\\ \text{ou } 2p < s < 4a;\end{matrix}\right\} \;.\;(295)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\, p\,Sin.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a} x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})(e^{re^{-sq}}+e^{-re^{-sq}}-2)\;,\; p < s-2a;\;.\;(296)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\, Cos.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1} x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})(e^{re^{-qs}}-e^{-re^{-qs}})\;\left.\begin{matrix}, p > 2a+1, s < 4a+2;\\ \text{ou } p < 2a+1, 2p < s;\end{matrix}\right\} \;.\;(297)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3}\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})(e^{re^{-sq}}-e^{-re^{-sq}})-2r\right]\;\left.\begin{matrix}, p = s-2a-1,\\ \text{et } 2p < s < 4a+2,\\ \text{ou } 2p < s < 4a+2;\end{matrix}\right\} \;.\;(298)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Cos.sx} - e^{-r\,Cos.sx})\, Sin.(r\,Sin.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1} x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})(e^{re^{-qs}}+e^{-re^{-qs}}-2)\,,\, p < s-2a-1;\;(299)$$

Dans la déduction de ces intégrales, on s'est aperçu que plusieurs fois les valeurs dans deux ou trois cas spéciaux, qui auparavant étaient distinctes, coincident ici, de sorte que les valeurs correspondantes deviennent les mêmes pour d'autres rélations mutuelles entre les éléments s, p et a. Dans ces intégrales (288) à (299) on a dû prendre les conditions, qui étaient communes à ces valeurs coincidentes, et ne pas admettre naturellement les autres con-

ditions, qui n'étaient valables que pour chaque cas à part. Encore il faut remarquer que l'intégrale (288) reçoit la même valeur ici, soit pour a pair, soit pour a impair, de sorte que cette distinction s'annulle auprès de cette intégrale, mais aussi auprès d'elle seulement.

Le facteur $e^{r\,Cos.sx}-e^{-r\,Cos.sx}$, qui se présente partout ici sous le signe d'intégration, n'est rien d'autre que la sinus hyperbolique, que Gudermann a introduite dans l'Analyse, et qui est représentée d'ordinaire par le signe *Sin h p.*; de sorte que le facteur mentionné deviendrait ici *Sin h p.* $(r\,Cos.\,s\,x)$.

Dans toutes les formules de ce paragraphe la valeur de r est entièrement arbitraire.

20. On pourrait encore acquérir des intégrales, qui correspondent au groupe précédent, lorsqu'on fait usage des suppositions:

$$\left.\begin{aligned}
{}_1\varphi_1(x)&=(e^{r\,Sin.sx}+e^{-r\,Sin.sx})Cos.(r\,Cos.sx)=2\sum_0^\infty\frac{r^{2n}}{1^{2n|1}}(-1)^n\,Cos.\,2\,n\,s\,x\\
{}_2\varphi_1(x)&=(e^{r\,Sin.sx}+e^{-r\,Sin.sx})Sin.(r\,Cos.sx)=2\sum_0^\infty\frac{r^{2n+1}}{1^{2n+1|1}}(-1)^n Cos.\{(2n+1)sx\}\\
{}_1\varphi_2(x)&=(e^{r\,Sin.sx}-e^{-r\,Sin.sx})Cos.(r\,Cos.sx)=2\sum_0^\infty\frac{r^{2n+1}}{1^{2n+1|1}}(-1)^n Sin.\{(2n+1)sx\}\\
{}_2\varphi_2(x)&=(e^{r\,Sin.sx}-e^{-r\,Sin.sx})Sin.(r\,Cos.sx)=-2\frac{r^{2n}}{1^{2n|1}}(-1)^n\,Sin.\,2\,n\,s\,x\,.
\end{aligned}\right\},r^2<\infty;.(af)$$

Ces formes donnent par la comparaison avec la formule (a) du paragraphe second les rélations respectives:

$$\left.\begin{aligned}
&{}_1A_0=2,\ {}_1A_1=0,\ {}_1A_{2n-1}=0,\ &&{}_1A_{2n}=2\frac{r^{2n}}{1^{2n|1}}(-1)^n;\\
&{}_2A_0=0,\ {}_2A_1=2r,\ {}_2A_{2n-1}=-2\frac{r^{2n-1}}{1^{2n-1|1}}(-1)^n,\ &&{}_2A_{2n}=0;\\
&{}_1B_1=2r,\ {}_1B_{2n-1}=-2\frac{r^{2n-1}}{1^{2n-1|1}}(-1)^n,\ &&{}_1B_{2n}=0;\\
&{}_2B_1=0,\ {}_2B_{2n-1}=0\ &&,{}_2B_{2n}=-2\frac{r^{2n}}{1^{2n|1}}(-1)^n;
\end{aligned}\right\},c=\infty;$$

tandis que l'on verra aisément n'avoir besoin que des sommations correspondantes

$$\left.\begin{aligned}
\sum_1^\infty{}_1A_{2n}e^{-2nsq}=-\sum_1^\infty{}_2B_{2n}e^{-2nsq}=2\sum_1^\infty\frac{r^{2n}}{1^{2n|1}}(-1)^n e^{-2nsq}=2\sum_1^\infty\frac{(-1)^n}{1^{2n|1}}(r\,e^{-sq})^{2n}\\
=2\,\{Cos.(r\,e^{-sq})-1\}
\end{aligned}\right\}(ag)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\sum_1^\infty {}_2A_{2n-1}\,e^{-(2n-1)sq} = \sum_1^\infty {}_1B_{2n-1}\,e^{-(2n-1)sq} = -2\sum_1^\infty \frac{r^{2n-1}}{1^{2n-1/1}}(-1)^n e^{-(2n-1)sq} = \\
\qquad\qquad = -2\sum_1^\infty \frac{(-1)^n}{1^{2n-1/1}}(r\,e^{-sq})^{2n-1} = 2\,Sin\,(r\,e^{-sq}) \\
\sum_2^\infty {}_1A_{2n}e^{-2nsq} = -\sum_2^\infty {}_2B_{2n}e^{-2nsq} = 2\sum_2^\infty \frac{r^{2n}}{1^{2n/1}}(-1)^n e^{-2nsq} = 2\left\{\frac{1}{2}r^2e^{-2sq} + Cos.(re^{-sq}) - 1\right\} \\
\sum_2^\infty {}_2A_{2n-1}\,e^{-(2n-1)sq} = \sum_2^\infty {}_1B_{2n-1}\,e^{-(2n-1)sq} = -2\sum_2^\infty \frac{r^{2n-1}}{1^{2n-1/1}}(-1)^n e^{-(2n-1)sq} = \\
\qquad\qquad = 2\left\{Sin.(r\,e^{-sq}) - r\,e^{-sq}\right\};
\end{array}\right\}(ag)$$

sauf les autres sommations naturellement, qui dépendent de a seulement et qui sont par conséquence tout-à-fait indépendantes de la forme des fonctions φ_1 ou φ_2. Eu égard à toutes les observations précédentes on tire en premier lieu des théorèmes (P) à (S):

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} + e^{-r\,Sin.sx})\,Cos.(r\,Cos.\,s\,x)\,\frac{Cos.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\left[\binom{2a}{a} + 2\sum_1^a\binom{2a}{n+a}e^{-2nq} + (e^q+e^{-q})^{2a}\left\{Cos.(re^{-sq})-1\right\}\right],\ s \geqq 2a;\ .\ (300)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} + e^{-r\,Sin.sx})\,Cos.(r\,Cos.\,s\,x)\,\frac{Cos.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left[2\sum_0^a\binom{2a+1}{n+a+1}e^{-(2n+1)q} + (e^q+e^{-q})^{2a+1}\left\{Cos.(re^{-sq})-1\right\}\right],\ s \geqq 2a+1;\ .\ (301)$$

$$\left.\begin{array}{l}
\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx}+e^{-r\,Sin.sx})\,Sin.(r\,Cos.sx)\frac{Cos.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}\left[0 + (e^q+e^{-q})^{2a}Sin.(r\,e^{-sq})\right],\ s \geqq 2a; \\
\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx}+e^{-r\,Sin.sx})\,Sin.(r\,Cos.sx)\frac{Cos.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}\left[0 + (e^q+e^{-q})^{2a+1}Sin.(re^{-sq})\right],\ s \geqq 2a+1;
\end{array}\right\}.(302)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx}-e^{-r\,Sin.sx})\,Cos\,(r\,Cos.sx)\frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^a 2^{-2a}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,Sin.(re^{-sq}),\ s>2a;\ .\ (303)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a}\pi\left[r\left\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\} + (e^q-e^{-q})^{2a}\left\{Sin.(r\,e^{-sq}) - r\,e^{-sq}\right\}\right] =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a}\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\,Sin.\,(r\,e^{-sq}) - r\right],\ s = 2a;\ .\ .\ .\ .\ .\ (304)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx}-e^{-r\,Sin.sx})\,Sin.\,(r\,Cos.\,s\,x)\frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\left\{Cos.(r\,e^{-sq})-1\right\},\ s>2a;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (305)$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\left[0 + (e^q-e^{-q})^{2a}\left\{\tfrac{1}{2}r^2e^{-2sq} + Cos.(r\,e^{-sq}) - 1\right\}\right],\ s = 2a;\ .\ (306)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} + e^{-r\,Sin.sx})\,Cos.(r\,Cos.sx)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+$$

$$+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\{Cos.(r\,e^{-sq})-1\}\Big],\ s>2a+1;\ .\ (307)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\Big[e^{-(2a+1)q}\Big\{(1-e^{(2a+1)2q})(1-e^{-2q})^{2a+1}-2\sum_0^a(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}\Big\}+$$

$$+0+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\Big\{\frac{1}{2}r^2e^{-2sq}+Cos.(re^{-sq})-1\Big\}\Big],\ s=2a+1;\ \dots\dots\ (308)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} + e^{-r\,Sin.sx})\,Sin\,(r\,Cos.sx)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\big[0+(e^q-e^{-q})^{2a+1}Sin.(r\,e^{-sq})\big],\ s>2a+1;\ \dots\dots\ (309)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\big[0+r\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\{Sin.(re^{-sq})-re^{-sq}\}\big]=$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\big[-r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}Sin.(r\,e^{-sq})\big],\ s=2a+1;\ \dots\ (310)$$

Par les mêmes substitutions les théorèmes (T) à (Y) nous fournissent:

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} + e^{-r\,Sin.sx})\,Cos.(r\,Cos.sx)\,\frac{Cos.^a x.\,Cos.px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$=2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\big[2e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\{Cos.(r\,e^{-sq})-1\}\big],\ p\geqq a, s\geqq 2a;\ .\ (311)$$

$$=2^{-a-1}\frac{\pi}{q}\Big[2\Big\{(e^q+e^{-q})^a e^{-pq}-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}\Big\}+$$

$$+(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\{Cos.(r\,e^{-sq})-1\}\Big],\ p<a, 2p\leqq s;\ \dots\dots\ (312)$$

où d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$.

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} + e^{-r\,Sin.sx})\,Sin.(r\,Cos.sx)\,\frac{Cos.^a x.\,Cos.px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$=2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\big[0+(e^{pq}+e^{-pq})\,Sin.(r\,e^{-sq})\big],\ p\geqq a, s\geqq 2a;\ \dots\ (313)$$

$$=2^{-a-1}\frac{\pi}{q}\big[0+(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\,Sin.(r\,e^{-sq})\big],\ p<a, 2p\leqq s;$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} - e^{-r\,Sin.sx})\,Cos.(r\,Cos.sx)\,\frac{Cos.^a x.\,Sin.px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$=2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\,Sin.(r\,e^{-sq}),\ p\leqq s-a;\ \dots\dots\ (314)$$

$$\int_0^\infty (e^{r \operatorname{Sin.} sx} - e^{-r \operatorname{Sin.} sx}) \operatorname{Sin.}(r \operatorname{Cos.} sx) \frac{\operatorname{Cos.}^a x . \operatorname{Sin.} px\, dx}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-a-1} \frac{\pi}{q} (e^q + e^{-q})^a (e^{-pq} - e^{pq}) \{\operatorname{Cos.}(r e^{-sq}) - 1\}, \quad p \leqq s - a; \; \ldots\ldots \quad (315)$$

$$\int_0^\infty (e^{r \operatorname{Sin.} sx} + e^{-r \operatorname{Sin.} sx}) \operatorname{Cos.}(r \operatorname{Cos.} sx) \frac{x \operatorname{Sin.}^{2a} x . \operatorname{Sin.} px\, dx}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} \left[2 e^{-pq} + (e^{-pq} - e^{pq}) \{\operatorname{Cos.}(r e^{-sq}) - 1\} \right], p > 2a, s > 4a; . (316)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - 2 e^{(2a-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - \right. \quad , p < 2a, \; 2p < s, \; p \text{ entier};$$

$$\left. - 2 e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \{\operatorname{Cos.}(r e^{-sq}) - 1\} \right] . \quad (317)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - 2 e^{(2a-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} - \right. \quad , p < 2a, 2p < s, \; p \text{ fractionnaire};$$

$$\left. - 2 e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \{\operatorname{Cos.}(r e^{-sq}) - 1\} \right] \ldots\ldots \quad (318)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[0 + (e^q - e^{-q})^{2a} \left\{ 2 e^{-pq} + (e^{-pq} - e^{pq}) \left[\frac{1}{2} r^2 e^{-2sq} + \right. \right. \right.$$

$$\left. \left. \left. + \operatorname{Cos.}(r e^{-sq}) - 1 \right] \right\} \right], \quad p = s - 2a, \; 2p > s > 4a; \; \ldots \quad (319)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - 2 e^{(2a-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - 2 e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} + \right.$$

$$\left. + 0 + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \left\{ \frac{1}{2} r^2 e^{-2sq} + \operatorname{Cos.}(r e^{-sq}) - 1 \right\} \right], p = s - 2a, 2p < s < 4a, p \text{ entier}; . (320)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a} - 2 e^{(2a-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{-2nq} - 2 e^{(p-2a)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a}{n} e^{2nq} + \right.$$

$$\left. + 0 + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \{ \tfrac{1}{2} r^2 e^{-2sq} + \operatorname{Cos.}(r e^{-sq}) - 1 \} \right], p = s - 2a, 2p < s < 4a, p \text{ fractionnaire}; . (321)$$

d est ici le plus grand nombre entier contenu dans $(a - \frac{1}{2} p)$.

$$\left. \begin{aligned} &\int_0^\infty (e^{r \operatorname{Sin.} sx} + e^{-r \operatorname{Sin.} sx}) \operatorname{Sin.}(r \operatorname{Cos.} sx) \frac{x \operatorname{Sin.}^{2a} x . \operatorname{Sin.} px\, dx}{q^2 + x^2} = \\ &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} \left[0 + (e^{-pq} - e^{pq}) \operatorname{Sin.}(r e^{-sq}) \right], p > 2a, s > 4a; \\ &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[0 + (e^q - e^{-q})^{2a} (e^{-pq} - e^{pq}) \operatorname{Sin.}(r e^{-sq}) \right], p < 2a, 2p < s, p \text{ arbitraire}; \end{aligned} \right\} . (322)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} + e^{-r\,Sin.sx})\,Sin.(r\,Cos.sx)\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[-r\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\} + $$
$$+ (e^q-e^{-q})^{2a}\{0+(e^{-pq}-e^{pq})\,[Sin.(re^{-sq})-re^{-sq}]\}\Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\big[r+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,Sin.(re^{-sq})\big],\ p=s-2a,\ 2p>s>4a;\ \ (323)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[0-r\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\} +$$
$$+ (e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,[Sin.(re^{-sq})-re^{-sq}]\}\Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\big[r+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,Sin.(re^{-sq})\big],\ p=s-2a,\ 2p<s<4a,$$ p arbitraire;

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} - e^{-r\,Sin.sx})\,Cos.(r\,Cos.sx)\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\,Sin.(re^{-sq}),\ p<s-2a;\ \ldots\ldots (324)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[r\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\} +$$
$$+ (e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\{Sin.(re^{-sq})-re^{-sq}\}\Big]\ \ .\ (325)$$
$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\big[-r+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\,Sin.(re^{-sq})\big],\ p=s-2a;$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} - e^{-r\,Sin.sx})\,Sin.(r\,Cos.sx)\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Cos.px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\{Cos.(re^{-sq})-1\},\ p<s-2a;\ .\ (326)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\big[0-(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\{\tfrac{1}{2}r^2e^{-2sq}+Cos.(re^{-sq})-1\}\big],\ p=s-2a;\ (327)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.sx} + e^{-r\,Sin.sx})\,Cos.(r\,Cos.sx)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\big[2e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\{Cos.(re^{-sq})-1\}\big],\ p>2a+1,\ s>4a+2;\ (328)$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[2e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-2e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-2e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\{Cos.(re^{-sq})-1\}\Big]$$
$p<2a+1$, $2p<s$, p entier; . . (329)

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\Big[2e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a+1}-2e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-$$
$$-2e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\{Cos.(re^{-sq})-1\}\Big]$$
$p<2a+1$; $2p<s$, p fractionnaire; (330)

$$\int_0^\infty (e^{r \operatorname{Sin}. s x} + e^{-r \operatorname{Sin}. s x}) \operatorname{Cos}. (r \operatorname{Cos}. s x) \frac{x \operatorname{Sin}.^{2a+1} x . \operatorname{Cos}. p x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[0 + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \big\{ 2 e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq}) \big[\tfrac{1}{2} r^2 e^{-2sq} +$$
$$+ \operatorname{Cos}. (r e^{-sq}) - 1 \big] \big\} \Big] , \; p = s - 2a - 1, \; 2p > s > 4a + 2; \; \ldots\ldots\ldots\ldots \; (331)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} - 2 e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d-1} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$
$$- 2 e^{(p-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} + 0 + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \big\{ \tfrac{1}{2} r^2 e^{-2sq} +$$
$$+ \operatorname{Cos}. (r e^{-sq}) - 1 \big\} \Big] , \; p = s - 2a - 1, \; 2p < s < 4a + 2, \; p \text{ entier}; \; \ldots\ldots \; (332)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[2 e^{-pq} (e^q - e^{-q})^{2a+1} - 2 e^{(2a+1-p)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{-2nq} -$$
$$- 2 e^{(p-2a-1)q} \sum_0^{d} (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} + 0 + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \big\{ \tfrac{1}{2} r^2 e^{-2sq} +$$
$$+ \operatorname{Cos}. (r e^{-sq}) - 1 \big\} \Big] , \; p = s - 2a - 1, \; 2p < s < 4a + 2, \; p \text{ fractionnaire}; \; \ldots \; (333)$$

dans ces intégrales d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a + 1 - p)$.

$$\int_0^\infty (e^{r \operatorname{Sin}. s x} + e^{-r \operatorname{Sin}. s x}) \operatorname{Sin}. (r \operatorname{Cos}. s x) \frac{x \operatorname{Sin}.^{2a+1} x . \operatorname{Cos}. p x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi (e^q - e^{-q})^{2a+1} \big[0 + (e^{pq} + e^{-pq}) \operatorname{Sin}. (r e^{-sq}) \big] , \; p > 2a + 1, \; s > 4a + 2;$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \big[0 + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \operatorname{Sin}. (r e^{-sq}) \big] , \; p < 2a + 1, \; 2p < s, \; p \text{ arbitraire}; \quad (334)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[r \big\{ (1 + e^{-2pq}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1 \big\} +$$
$$+ (e^q - e^{-q})^{2a+1} \big\{ 0 + (e^{pq} + e^{-pq}) \big[\operatorname{Sin}. (r e^{-sq}) - r e^{-sq} \big] \big\} \Big]$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \big[-r + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \operatorname{Sin}. (r e^{-sq}) \big] , \; p = s - 2a - 1, \; 2p > s > 4a + 2;$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \Big[0 + r \big\{ (1 + e^{-2pq}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1 \big\} + \quad (335)$$
$$+ (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \big\{ \operatorname{Sin}. (r e^{-sq}) - r e^{-sq} \big\} \Big]$$
$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \big[-r + (e^q - e^{-q})^{2a+1} (e^{pq} + e^{-pq}) \operatorname{Sin}. (r e^{-sq}) \big] , \; p = s - 2a - 1, \; 2p < s < 4a + 2, \; p \text{ arbitraire};$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.\,sx} - e^{-r\,Sin.\,sx})\,Cos.\,(r\,Cos.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq} - e^{-pq})\,Sin.\,(r\,e^{-sq}),\; p < s - 2a - 1\,;\quad (336)$$

$$\left.\begin{aligned} &= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[r\,\{(1-e^{-2pq})\,(1-e^{-2q})^{2a+1} - 1\} + \\ &\qquad + (e^q - e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq} - e^{-pq})\,\{Sin.\,(r\,e^{-sq}) - r\,e^{-sq}\}\Big] \\ &= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\pi\Big[-r + (e^q - e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq} - e^{-pq})\,Sin.\,(r\,e^{-sq})\Big],\; p = s - 2a - 1\,; \end{aligned}\right\}.\,(337)$$

$$\int_0^\infty (e^{r\,Sin.\,sx} - e^{-r\,Sin.\,sx})\,Sin.\,(r\,Cos.\,s\,x)\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x.\,Sin.\,p.\,x\,d\,x}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq} - e^{-pq})\,\{Cos.\,(r\,e^{-sq}) - 1\},\; p < s - 2a - 1\,;\,.\,(338)$$

$$= (-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[0 - (e^q - e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq} - e^{-pq})\,\{\tfrac{1}{2}\,r^2\,e^{-2sq} + $$
$$+ Cos.\,(r\,e^{-sq}) - 1\}\Big],\; p = s - 2a - 1\,;\;.\;.\,(339)$$

On a ici partout $r^2 < \infty$, de sorte que r est absolument arbitraire. Ainsi auprès de ces intégrales le cas se présente souvent que la différence s'évanouit entre les valeurs qui éxistent pour les différentes rélations mutuelles entre les éléments p, s et a: on ne garde dans ces cas que les conditions qui étaient communes aux divers cas coincidents. Ensuite la formule (302) nous indique qu'ici encore il n'y a plus lieu de distinguer entre un a pair et un a impair; mais c'est aussi la seule formule qui jouit de cette généralité. Ici tout comme au paragraphe précédent, le facteur $e^{r\,Sin.\,sx} - e^{-r\,Sin.\,sx}$ est la $Sin\,hp.\;(r\,Sin.\,s\,x)$.

21. Supposons encore

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= (1 + 2r\,Cos.\,sx + r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Cos.\left\{b\,Arctang.\,\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1 + r\,Cos.\,s\,x}\right\} = \sum_0^\infty \binom{b}{n} r^n\,Cos.\,nsx \\ \varphi_2(x) &= (1 + 2r\,Cos.\,sx + r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Sin.\left\{b\,Arctang.\,\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1 + r\,Cos.\,s\,x}\right\} = \sum_1^\infty \binom{b}{n} r^n\,Sin.\,nsx \end{aligned}\right\},\, r^2 < 1\,;\,.\,(ah)$$

En comparant ces sommations à celles qui se présentent dans les équations générales (a), on en conclut qu'il faut prendre

$$A_0 = 1\;,\; A_n = \binom{b}{n} r^n\;,\; B_n = \binom{b}{n} r^n\;.$$

En outre il se présente seulement les sommations suivantes dans l'application des formules précédentes:

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^\infty \mathrm{A}_n e^{-nsq} &= \sum_1^\infty \mathrm{B}_n e^{-nsq} = \sum_1^\infty \binom{b}{n} r^n e^{-nsq} = \sum_1^\infty \binom{b}{n} (r e^{-qs})^n = (1 + r e^{-qs})^b - 1 \\ \sum_2^\infty \mathrm{A}_n e^{-nsq} &= \sum_2^\infty \mathrm{B}_n e^{-nsq} = \sum_2^\infty \binom{b}{n} r^n e^{-nsq} = (1 + r e^{-qs})^b - 1 - b r e^{-qs}\end{aligned}\right\} . (ai)$$

Des théorèmes (P) à (S) on déduit en conséquence:

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \,Cos.\, s x + r^2)^{\frac{1}{2}b} \,Cos.\, \left\{ b \,Arctang.\, \frac{r \,Sin.\, s x}{1 + r \,Cos.\, s x} \right\} \frac{Cos.^{2a} x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-2a-1} \frac{\pi}{q} \left[\binom{2a}{a} + 2 \sum_1^a \binom{2a}{n+a} e^{-2nq} + (e^q + e^{-q})^{2a} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right], \ s \geqq 2a; . (340)$$

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \,Cos.\, s x + r^2)^{\frac{1}{2}b} \,Cos.\, \left\{ b \,Arctang.\, \frac{r \,Sin.\, s x}{1 + r \,Cos.\, s x} \right\} \frac{Cos.^{2a+1} x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= 2^{-2a-2} \frac{\pi}{q} \left[2 \sum_0^a \binom{2a+1}{n+a+1} e^{-(2n+1)q} + (e^q + e^{-q})^{2a+1} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right], \ s \geqq 2a+1; (341)$$

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \,Cos.\, s x + r^2)^{\frac{1}{2}b} \,Sin.\, \left\{ b \,Arctang.\, \frac{r \,Sin.\, s x}{1 + r \,Cos.\, s x} \right\} \frac{x \,Sin.^{2a} x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi (e^q - e^{-q})^{2a} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} , \ s > 2a; \ldots\ldots\ldots (342)$$

$$\left.\begin{aligned} &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[b r \{ (1 - e^{-2q})^{2a} - 1 \} + (e^q - e^{-q})^{2a} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 - b r e^{-qs} \} \right] \\ &= (-1)^a 2^{-2a-1} \pi \left[- b r + (e^q - e^{-q})^{2a} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right] \end{aligned}\right\} , s = 2a; . (343)$$

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \,Cos.\, s x + r^2)^{\frac{1}{2}b} \,Cos.\, \left\{ b \,Arctang.\, \frac{r \,Sin.\, s x}{1 + r \,Cos.\, s x} \right\} \frac{x \,Sin.^{2a+1} x \, d x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \left[e^{-(2a+1)q} \left\{ (1 - e^{(2a+1)2q}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \right\} + \right.$$

$$\left. + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right], \ s > 2a + 1; \ldots (344)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \left[e^{-(2a+1)q} \left\{ (1 - e^{(2a+1)2q}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \right\} + \right.$$

$$\left. + b r \{ (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 1 \} + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 - b r e^{-qs} \} \right]$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2} \pi \left[e^{-(2a+1)q} \left\{ (1 - e^{(2a+1)2q}) (1 - e^{-2q})^{2a+1} - 2 \sum_0^a (-1)^n \binom{2a+1}{n} e^{2nq} \right\} - \right.$$

$$\left. - b r + (e^q - e^{-q})^{2a+1} \{ (1 + r e^{-qs})^b - 1 \} \right], \ s = 2a + 1; \ldots\ldots\ldots\ldots (345)$$

et tout de même des théorèmes (T) à (Y):

$$\int_0^\infty (1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Cos.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\right\}\frac{Cos.^a x.\,Cos.\,px}{q^2+x^2}\,dx =$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\{(1+re^{-qs})^b-1\}\right]$$

$$=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\left[(e^{-pq}-e^{pq})+(e^{pq}+e^{-pq})(1+re^{-qs})^b\right],\ p \geqq a,\ s \geqq 2a;\ .\ (346)$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}\left[(e^q+e^{-q})^a e^{-pq}-e^{(a-p)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{-2nq}+e^{(p-a)q}\sum_0^d\binom{a}{n}e^{2nq}+\right.$$

$$\left.+\ (e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\frac{1}{2}\{(1+re^{-qs})^b-1\}\right],\ p<a,\ 2p \leqq s;\ \ldots\ldots\ (347)$$

où d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(a-p)$.

$$\int_0^\infty (1+2r\,Cos\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Sin.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\right\}\frac{Cos.^a x.\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{2}\{(1+re^{-qs})^b-1\},\ p \leqq s-a;\ \ldots\ldots\ (348)$$

$$\int_0^\infty (1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Cos.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\left[e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\{(1+re^{-qs})^b-1\}\right]$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}\left[(e^{-pq}+e^{pq})+(e^{-pq}-e^{pq})(1+re^{-qs})^b\right],p>2a,s>4a;.\ (349)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}+\right.$$

$$\left.+\ (e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\{(1+re^{-qs})^b-1\}\right],\ p<2a,\ 2p<s,\ p\ \text{entier};\ \ldots\ldots\ (350)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[e^{-pq}(e^q-e^{-q})^{2a}-e^{(2a-p)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq}-e^{(p-2a)q}\sum_0^d(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq}+\right.$$

$$\left.+\ (e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\{(1+re^{-qs})^b-1\}\right],\ p<2a,\ 2p<s,\ p\ \text{fractionnaire};\ \ldots\ (351)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[-\frac{1}{2}br\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+\right.$$

$$\left.+\ (e^q-e^{-q})^{2a}\left\{e^{-pq}+(e^{-pq}-e^{pq})\frac{1}{2}\left[(1+re^{-qs})^b-1-bre^{-qs}\right]\right\}\right],\ p=s-2a,\ 2p>s>4a;$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\left[br+(e^q-e^{-q})^{2a}\{(e^{-pq}+e^{pq})+(e^{-pq}-e^{pq})(1+re^{-qs})^b\}\right]\ \ldots\ (352)$$

$$\int_0^\infty (1 + 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2)^{\frac{1}{2}b}\, Cos.\left\{b\, Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1 + r\,Cos.\,s\,x}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a}\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[b\,r - 2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} - 2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a}\left\{(e^{-pq} + e^{pq}) + (e^{-pq} - e^{pq})(1 + r\,e^{-qs})^b\right\}\Big],\ p = s - 2a,\ 2p < s < 4a,\ p \text{ entier}; \ldots\ldots\ (353)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[b\,r - 2\,e^{(2a-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{-2nq} - 2\,e^{(p-2a)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a}{n}e^{2nq} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a}\left\{(e^{-pq} + e^{pq}) + (e^{-pq} - e^{pq})(1 + r\,e^{-qs})^b\right\}\Big],\ p = s - 2a,\ 2p < s < 4a,\ p \text{ fractionnaire}; \ldots\ (354)$$

Ici d est le plus grand nombre entier contenu dans $(a - \frac{1}{2}p)$.

$$\int_0^\infty (1 + 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2)^{\frac{1}{2}b}\, Sin.\left\{b\, Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1 + r\,Cos.\,s\,x}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a}\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a}(e^{pq} + e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1 + r\,e^{-qs})^b - 1\right\},\ p < s \quad 2a;\ .\ (355)$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[\frac{1}{2}\,b\,r\left\{(1 + e^{-2pq})(1 - e^{-2q})^{2a} - 1\right\} +$$

$$+ (e^q - e^{-q})^{2a}(e^{pq} + e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1 + r\,e^{-qs})^b - 1 - b\,r\,e^{-qs}\right\}\Big]$$

$$= (-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[-b\,r + (e^q - e^{-q})^{2a}(e^{pq} + e^{-pq})\left\{(1 + r\,e^{-qs})^b - 1\right\}\Big],\ p = s - 2a;\ .\ (356)$$

$$\int_0^\infty (1 + 2\,r\,Cos.\,s\,x + r^2)^{\frac{1}{2}b}\, Cos.\left\{b\, Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1 + r\,Cos.\,s\,x}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2 + x^2} =$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a+1}\Big[e^{-pq} + (e^{pq} + e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1 + r\,e^{-qs})^b - 1\right\}\Big]$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-3}\pi\,(e^q - e^{-q})^{2a+1}\Big[(e^{-pq} - e^{pq}) + (e^{pq} + e^{-pq})(1 + r\,e^{-qs})^b\Big],\ p > 2a + 1,\ s > 4a + 2;\ .\ (357)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-pq}(e^q - e^{-q})^{2a+1} - e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} -,\ p < 2a + 1,\ 2p < s,$$

$$- e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a+1}(e^{pq} + e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{(1 + r\,e^{-qs})^b - 1\right\}\Big]\ p \text{ entier}; \ldots\ (358)$$

$$= (-1)^{a-1} 2^{-2a-2}\pi\Big[e^{-pq}(e^q - e^{-q})^{2a+1} - e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq} -,\ p < 2a + 1,\ 2p < s,$$

$$- e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq} + (e^q - e^{-q})^{2a+1}(e^{pq} + e^{-pq})\frac{1}{2}\left\{1 + r\,e^{-qs})^b - 1\right\}\Big]\ p \text{ fractionnaire}; \ldots\ldots\ (359)$$

$$\int_0^\infty (1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Cos.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[\tfrac{1}{2}br\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+\right.$$

$$\left.+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\{e^{-pq}+(e^{pq}+e^{-pq})\tfrac{1}{2}[(1+re^{-qs})^b-1-bre^{-qs}]\}\right]$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\left[-br+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\{(e^{-pq}-e^{pq})+(e^{pq}+e^{-pq})(1+re^{-qs})^b\}\right],\ p=s-2a-1,\ 2p>s>4a+2;\ \ldots\ldots (360)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\left[-br-2e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d-1}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-2e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+\right.$$

$$\left.+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\{(e^{-pq}-e^{pq})+(e^{pq}+e^{-pq})(1+re^{-qs})^b\}\right],\ p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p \text{ entier};\ \ldots\ldots (361)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\left[-br-2e^{(2a+1-p)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{-2nq}-2e^{(p-2a-1)q}\sum_0^{d}(-1)^n\binom{2a+1}{n}e^{2nq}+\right.$$

$$\left.+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\{(e^{-pq}-e^{pq})+(e^{pq}+e^{-pq})(1+re^{-qs})^b\}\right],\ p=s-2a-1,\ 2p<s<4a+2,\ p \text{ fractionnaire};\ \ldots\ldots (362)$$

Ici d est le plus grand nombre entier contenu dans $\frac{1}{2}(2a+1-p)$.

$$\int_0^\infty (1+2r\,Cos.\,sx+r^2)^{\frac{1}{2}b}\,Sin.\left\{b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\right\}\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\ Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\{(1+re^{-qs})^b-1\},\ p<s-2a-1;\ .(363)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[\frac{1}{2}br\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\}+\right.$$

$$\left.+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\frac{1}{2}\{(1+re^{-qs})^b-1-bre^{-qs}\}\right]$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\left[-br+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\{(1+re^{-qs})^b-1\}\right],\ p=s-2a-1;\ \ldots\ldots (364)$$

Lorsqu'à présent on compare les intégrales (346), (347) avec la formule (348), les intégrales (349), (350), (351) avec la formule (355), les intégrales (352), (353), (354) avec la formule (356), les intégrales (357), (358), (359) avec la formule (363), et les intégrales (360), (361), (362) avec la formule (364), il est évident, que les fonctions sous le signe d'intégration ne diffèrent que dans les deux facteurs, qui sont respectivement une *Sinus* ou une *Cosinus* des deux formes:

$$b\,Arctang.\frac{r\,Sin.\,sx}{1+r\,Cos.\,sx}\ \text{ et } px\ .$$

La combination de ces intégrales correspondantes par voie d'addition et de

soustraction en produit de nouvelles, qui auront respectivement sous le signe d'intégration la *Sinus* ou la *Cosinus* de cette autre forme:

$$p x \pm b \, Arctang. \frac{r \, Sin. \, s x}{1 + r \, Cos. \, s x} = \varphi .$$

Mais celle-ci peut être réduite de la manière suivante. Prenons p, qui est tout-à-fait arbitraire, égal à bt, où t reste arbitraire de même; de telle manière nous pourrons représenter la somme mentionnée par un *Arctang.*: car

$$\varphi = b t x \pm b \, Arctang. \frac{r \, Sin. \, s x}{1 + r \, Cos. \, s x} = b \left[Arctang. (Tang. \, t \, x) \pm Arctang. \frac{r \, Sin. \, s x}{1 + r \, Cos. \, s x} \right] =$$

$$= b \, Arctang. \left\{ \frac{Tang. \, t \, x \pm \dfrac{r \, Sin \, s x}{1 + r \, Cos. \, s x}}{1 \mp Tang. \, t x \dfrac{r \, Sin. \, s x}{1 + r \, Cos. \, s x}} \right\}$$

$$= b \, Arctang. \left(\frac{Sin. t x (1 + r Cos. s x) \pm r Sin. s x . Cos. t x}{Cos. t x (1 + r Cos. s x) \mp r Sin. s x . Sin. t x} \right) = b \, Arctang. \left(\frac{Sin. t x + r Sin. \{ (t \pm s) x \}}{Cos. t x + r Cos. \{ (t \pm s) x \}} \right) . (ak)$$

Puisque t est arbitraire, nous rendrons cette forme encore plus symmétrique, en posant $u \mp \frac{1}{2} s$ au lieu de t, car alors $t \pm s$ acquiert la valeur $u \pm \frac{1}{2} s$ et u reste tout aussi arbitraire, que l'étaient auparavant t et p. Ainsi la valeur de φ devient:

$$\varphi = b \, Arctang. \left(\frac{Sin. \, \{ (u \mp \frac{1}{2} s) x \} + r \, Sin. \, \{ (u \pm \frac{1}{2} s) x \}}{Cos. \, \{ (u \mp \frac{1}{2} s) x \} + r \, Cos. \, \{ (u \pm \frac{1}{2} s) x \}} \right) \quad \ldots \ldots \ldots (al)$$

Lorsqu'encore on développe les *Sinus* et les *Cosinus*, tant dans le numérateur que dans le dénominateur de cette fraction, et que l'on réunit les termes, qui sont homogènes à l'égard de l'élément r, on obtient par la division commune avec $Cos. \, u x . \, Cos. \frac{1}{2} s x$, une autre valeur de φ:

$$\varphi = b \, Arctang. \frac{(1 + r) \, Tang. \, u x \mp (1 - r) \, Tang. \frac{1}{2} s x}{(1 + r) \mp (1 - r) \, Tang. \, u x . \, Tang. \frac{1}{2} s x} \quad \ldots \ldots \ldots (am)$$

Quelle valeur de l'arc φ, que l'on veuille choisir, il sera toujours aisé d'obtenir à l'aide des intégrales mentionnées les valeurs des intégrales suivantes:

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \, Cos. \, s x + r^2)^{\frac{1}{2} b} \, Cos. \, \varphi \frac{Cos.^a x \, d x}{q^2 + x^2}, \int_0^\infty (1 + 2 r \, Cos. \, s x + r^2)^{\frac{1}{2} b} \, Sin. \, \varphi \frac{x \, Sin.^{2a} x \, d x}{q^2 + x^2},$$

$$\int_0^\infty (1 + 2 r \, Cos. \, s x + r^2)^{\frac{1}{2} b} \, Cos. \, \varphi \frac{x \, Sin.^{2a+1} x \, d x}{q^2 + x^2} .$$

Encore il faut observer, qu'il est permis de prendre b négatif. Dans ce cas-là le facteur $(1 + 2r\,Cos.\,sx + r^2)^{\frac{1}{2}b}$ sous le signe d'intégration se change en $(1 + 2r\,Cos.\,sx + r^2)^{-\frac{1}{2}b}$: tandis que la *Cosinus* de l'arc $b\ Arctang.\,\frac{r\,Sin.\,sx}{1 + r\,Cos.\,sx}$, qui devient négatif en conséquent, ne change pas de valeur et que la *Sinus* du même arc devient négative. En prenant dans le premier cas, où les intégrales contiennent une *Cosinus* de l'arc mentionné, la différence des deux intégrales correspondantes à b et $-b$ respectivement, tandis qu'il en faut prendre la somme, quand c'est la *Sinus* de cet arc, qui entre sous le signe d'intégration, — alors dans la valeur des nouvelles intégrales toutes les sommations s'annullent, parce qu'elles ne dépendent que de la quantité d, c'est-à-dire en dernière analyse de l'élément a, et qu'ainsi elles sont parfaitement indépendantes de b. Non-seulement alors les expressions deviennent plus simples, mais encore il se présente ici le phénomène déjà observé antérieurement, que les divers cas spéciaux, qui auparavant étaient à distinguer entre eux, viennent à coincider.

Sous le signe d'intégration on obtiendra le facteur:

$(1 + 2r\,Cos.\,sx + r^2)^{\frac{1}{2}b} \pm (1 + 2r\,Cos.\,sx + r^2)^{-\frac{1}{2}b}$ au lieu de $(1 + 2r\,Cos.\,sx + r^2)^{\frac{1}{2}b}$,

et dans la valeur de l'intégrale la fonction

$$(1 + re^{-\varphi i})^b - (1 + re^{-\varphi i})^{-b} \text{ au lieu de } (1 + re^{-\varphi i})^b - 1.$$

De plus on a partout ici la condition, que la valeur numérique de r doit rester au dessous de l'unité. On pourrait changer cette condition dans l'autre, que r^2 reste toujours plus grande que l'unité, par la supposition de r égal à $\frac{1}{r}$: mais alors les fonctions sous le signe d'intégration changeraient de forme.

22. Enfin les résultats ne manqueront pas d'importance, que l'on acquiert en supposant dans les formules générales (P) à (Y):

$$\left.\begin{aligned} \varphi_1(x) &= l(1 + 2r\,Cos.\,sx + r^2) = -2\sum_1^{\infty}\frac{(-r)^n}{n}\,Cos.\,nsx \\ \varphi_2(x) &= Arctang.\left(\frac{r\,Sin.\,sx}{1 + r\,Cos.\,sx}\right) = -\sum_1^{\infty}\frac{(-r)^n}{n}\,Sin.\,nsx \end{aligned}\right\},\ r^2 \leqq 1;\ \dots\dots\dots\ (an)$$

En premier lieu substituons $\varphi_1(x)$ dans les théorèmes (P), (Q), (S), (T), (V) et (X), et nous aurons ici $A_0 = 0$, $A_n = -2\frac{(-r)^n}{n}$; donc puisque

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^\infty \mathrm{A}_n e^{-nqs} &= \sum_1^\infty -2\frac{(-r)^n}{n}e^{-nqs} = -2\sum_1^\infty \frac{(-re^{-qs})^n}{n} = 2\,l\,(1+re^{-qs})\\ \sum_2^\infty \mathrm{A}_n e^{-nqs} &= -2\left\{re^{-qs}+\sum_1^\infty\frac{(-re^{-qs})^n}{n}\right\} = -2\left\{re^{-qs}-l\,(1+re^{-qs})\right\}\end{aligned}\right\}\ldots(ao)$$

les théorèmes mentionnés nous donnent:

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty l\,(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{Cos.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a}\,l\,(1+re^{-qs}),\ s \geqq 2a;\\ &\int_0^\infty l\,(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{Cos.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = 2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a+1}\,l\,(1+re^{-qs}),\ s\geqq 2a+1;\end{aligned}\right\}.(365)$$

$$\int_0^\infty l\,(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2} = (-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,l\,(1+re^{-qs}),\ s>2a+1;\ \ldots(366)$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\Big[r\left\{(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\left\{-re^{-qs}+l\,(1+re^{-qs})\right\}\Big]$$

$$= (-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\Big[r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,l\,(1+re^{-qs})\Big],\ s=2a+1;\ \ldots(367)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty l\,(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{Cos.^a x.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2} =\\ &\qquad = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,(1+re^{-qs}),\ p\geqq a,\ s\geqq 2a;\\ &\qquad = 2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,(1+re^{-qs}),\ p<a,\ 2p\leqq s;\end{aligned}\right\}.(368)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty l\,(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2} =\\ &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{-pq}-e^{pq})\,l\,(1+re^{-qs}),\ p>2a,\ s>4a;\\ &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{-pq}-e^{pq})\,l\,(1+re^{-qs}),\ p<2a,\ 2p<s,\ p\ \text{arbitraire};\end{aligned}\right\}.(369)$$

$$\left.\begin{aligned}&= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[-r\left\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\right\}+\\ &\qquad + (e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l\,(1+re^{-qs})-re^{-qs}\Big]\\ &= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[r+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l\,(1+re^{-qs})\Big]\end{aligned}\right\},\ p=s-2a,\ 2p>s>4a;$$

$$\left.\begin{aligned}&= (-1)^a 2^{-2a-1}\pi\Big[r+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l\,(1+re^{-sq})\Big],\ p=s-2a,\ 2p<s<4a;\ p\ \text{arbitraire}.\end{aligned}\right\}.(370)$$

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^\infty l\,(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2} =\\ &= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,(1+re^{-qs}),\ p>2a+1,\ s>4a+2;\\ &= (-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,(1+re^{-qs}),\ p<2a+1,\ 2p<s,\ p\ \text{arbitraire};\end{aligned}\right\}.(371)$$

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2}= \\ \left.\begin{array}{l}=(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[r\left\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\right\}+\right. \\ \quad\left.+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})\left\{-re^{-qs}+l(1+re^{-qs})\right\}\right] \\ =(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[-r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})l(1+re^{-qs})\right]\end{array}\right\},\begin{array}{l}p=s-2a-1,\\ 2p>s>4a+2;\end{array} \\ =(-1)^{a-1}2^{-2a-2}\pi\left[-r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}+e^{-pq})l(1+re^{-qs})\right]\begin{array}{l},p=s-2a-1,\\ 2p<s<4a+2,\\ p \text{ arbitraire};\end{array}\end{array}\right\}.(372)$$

D'après les équations (an) ces intégrales jouissent des valeurs trouvées autant que r reste entre les limites de l'unité négative et de l'unité positive, de sorte que r peut devenir négatif; dans ce cas le facteur logarithmique $l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)$ sous le signe d'intégration devient ici $l(1-2r\,Cos.\,sx+r^2)$. Si l'on prend la somme de deux intégrales correspondantes, on trouve sous le signe d'intégration le facteur:

$$l(1+2r\,Cos.\,sx+r^2)+l(1-2r\,Cos.\,sx+r^2)=l\{(1+r^2)^2-4r^2Cos.^2sx\}=l\{1-2r^2Cos.\,2sx+r^4\};$$

de sorte que l'intégrale ainsi déduite ne diffère de la précédente qu'en ce qu'on a r^2 et $2s$ au lieu de r et de s, et ne donne rien de nouveau. Au contraire la différence des deux intégrales nous fournit de nouveaux résultats, et l'on aura ainsi:

$$\left.\begin{array}{l}\displaystyle\int_0^\infty l\frac{1+2r\,Cos.\,sx+r^2}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{Cos.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2}=2^{-2a}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a}\,l\frac{1+re^{-qs}}{1-re^{-qs}},\ s\geqq 2a; \\ \displaystyle\int_0^\infty l\frac{1+2r\,Cos.\,sx+r^2}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{Cos.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2}=2^{-2a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^{2a+1}\,l\frac{1+re^{-qs}}{1-re^{-qs}},\ s\geqq 2a+1;\end{array}\right\}.(373)$$

$$\int_0^\infty l\frac{1+2r\,Cos.\,sx+r^2}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,l\frac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}},\ s>2a+1;.(374)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[-2r+(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,l\frac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}}\right],\ s=2a+1;.(375)$$

$$\int_0^\infty l\frac{1+2r\,Cos.\,sx+r^2}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{Cos.^a x.\,Cos.\,px\,dx}{q^2+x^2}=2^{-a-1}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}+e^{-pq})\,l\frac{1+re^{-qs}}{1-re^{-qs}},\ \begin{array}{l}p\geqq a,\ s\geqq 2a,\\ \text{ou } p<a,\ 2p\leqq s;\end{array}.(376)$$

$$\int_0^\infty l\frac{1+2r\,Cos.\,sx+r^2}{1-2r\,Cos.\,sx+r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x.\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l\frac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}},\ p>2a,\ s>4a,\ \text{ou } p<2a,\ 2p<s;.(377)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi\left[-2r+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{-pq}-e^{pq})\,l\frac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}}\right],\ \begin{array}{l}p=s-2a \text{ et } 2p>s>4a,\\ \text{ou } 2p<s<4a;\end{array}.(378)$$

$$\int_0^\infty l\frac{1+2r\,Cos.sx+r^2}{1-2r\,Cos.sx+r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}x.Cos.px\,dx}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi(e^q-e^{-q})^{2a-1}(e^{pq}+e^{-pq})\,l\frac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}},\ p>2a+1,\ s<4a+2,\ \text{ou}\ p<2a+1,\ 2p<s;\ .\ (379)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\left[2r+(e^q-e^{-q})^{2a-1}(e^{pq}+e^{-pq})\,l\frac{1-re^{-qs}}{1+re^{-qs}}\right],\ p=s-2a-1\ \text{et}\ 2p>s>4a+2,\ \text{ou}\ 2p<s<4a+2;\ .\ .\ .\ (380)$$

Dans cette réduction de nouveau, il y a plusieurs des cas spéciaux, qui coincident et dont la différence disparait: mais cela a lieu ici d'une autre manière qu'auparavant. De plus les intégrales (365) et (373) valent tant pour des a pairs que pour des a impairs. Partout ici la valeur numérique de r doit rester au dessous de l'unité, mais on peut aisément déduire les valeurs de ces intégrales pour le cas contraire, où r^2 soit plus grand que l'unité: on posera pour cela $r=\frac{1}{r'}$. Les formules (373) à (380) donneront immédiatement les valeurs requises, sans que la forme de la fonction intégrée change aucunement. Il n'en est pas ainsi des intégrales précédentes; mais puisque

$$l(1+2r\,Cos.sx+r^2)=lr^2+l\left(1+\frac{2}{r}Cos.sx+\frac{1}{r^2}\right),$$

on n'aura qu'à soustraire de leurs valeurs respectives le produit de 2 lr par la valeur des intégrales (21), (22), (pour $a+1$ au lieu de a) (154), (23) et (24), (157) à (159) et (160) à (162) pour acquérir des intégrales de forme identique aux intégrales (365) à (372).

25. Il nous reste encore à introduire la supposition $q_2(x)$ des équations (an) dans les théorèmes (R), (U), (W) et (Y). Alors B_n devient $-\frac{(-r)^n}{n}$, et par conséquent:

$$\left.\begin{aligned}\sum_1^\infty B_n e^{-nqs}&=\sum_1^\infty-(-r)^n e^{-nqs}=-\sum_1^\infty\frac{(-re^{-qs})^n}{n}=l(1+re^{-qs}),\\ \sum_2^\infty B_n e^{-nqs}&=-re^{-qs}+\sum_1^\infty B_n e^{-nqs}=l(1+re^{-qs})-re^{-qs}\ .\ .\ .\ .\end{aligned}\right\}(ap)$$

A l'aide de ces deux réductions les formules mentionnées nous donnent:

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{r\,Sin.sx}{1+r\,Cos.sx}\,\frac{x\,Sin.^{2a}x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}l(1+re^{-qs}),\ s>2a;\ .\ (381)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[r\{(1-e^{-2q})^{2a}-1\}+(e^q-e^{-q})^{2a}\{l(1+re^{-qs})-re^{-qs}\}\right]=$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-1}\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a}l(1+re^{-qs})-r\right],\ s=2a;\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (382)$$

$$\int_0^\infty Arctg.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\,\frac{Cos.^a x.\,Sin.\,p\,x\,dx}{q^2+x^2}=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\,l(1+re^{-qs})\;,\;p\overset{<}{=}s-a;\;\ldots\;(383)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\,\frac{x\,Sin.^{2a} x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\,l(1+re^{-qs})\;,\;p<s-2a;\;\ldots\ldots\;(384)$$

$$=(-1)^a 2^{-2a-2}\pi\Big[r\big\{(1+e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a}-1\big\}+(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\big\{l(1+re^{-qs})-re^{-qs}\big\}\Big]=$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a}(e^{pq}+e^{-pq})\,l(1+re^{-qs})-r\Big]\;,\;p=s-2a;\;\ldots\ldots\;(385)$$

$$\int Arctang.\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1} x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\,l(1+re^{-qs})\;,\;p<s-2a-1;\;\ldots\;(386)$$

$$=(-1)^{a-1}2^{-2a-3}\pi\Big[r\big\{(1-e^{-2pq})(1-e^{-2q})^{2a+1}-1\big\}+(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\big\{l(1+re^{-qs})-re^{-qs}\big\}\Big]=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\Big[(e^q-e^{-q})^{2a+1}(e^{pq}-e^{-pq})\,l(1+re^{-qs})-r\Big]\;,\;p=s-2a-1;\;.\;(387)$$

Quoique dans ces formules il n'y a plus de sommations, on peut pourtant, tout comme au numéro précédent, combiner ces intégrales par voie d'addition et de soustraction avec les intégrales correspondantes, que l'on obtient en rendant r négatif: ce qui est permis, puisque r est compris entre -1 et $+1$. De telle sorte on obtiendra des résultats très-simples, lorsqu'on se sert des transformations suivantes:

$$\left.\begin{aligned}
&Arctg.\left(\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\right)+Arctg.\left(\frac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,s\,x}\right)=Arctg.\frac{\dfrac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}+\dfrac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,s\,x}}{1-\dfrac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\cdot\dfrac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,s\,x}}=Arctg.\frac{-r^2\,Sin.\,2\,s\,x}{1-r^2\,Cos.\,2\,s\,x}\\
&Arctg.\left(\frac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\right)-Arctg.\left(\frac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,s\,x}\right)=Arctg.\frac{\dfrac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}-\dfrac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,s\,x}}{1+\dfrac{r\,Sin.\,s\,x}{1+r\,Cos.\,s\,x}\cdot\dfrac{-r\,Sin.\,s\,x}{1-r\,Cos.\,s\,x}}=Arctg.\frac{2\,r\,Sin.\,s\,x}{1-r^2}
\end{aligned}\right\}.(aq)$$

On pourra appliquer la seconde de ces formules à toutes les intégrales (381) à (387), mais l'application de la première auprès des intégrales (381), (383), (384), (386) ne nous fournira rien de nouveau, tandis qu'au contraire son usage auprès des intégrales (382), (385) et (387) nous donnera bien des nouveaux résultats, où l'on peut prendre s au lieu de $2s$. Alors il vient:

$$\int_0^\infty Arctg.\frac{r^2\,Sin.\,s\,x}{1-r^2\,Cos.\,s\,x}\,\frac{x\,Sin.^{2a} x\,dx}{q^2+x^2}=(-1)^{a-1}2^{-2a-1}\pi(e^q-e^{-q})^{2a}l(1-r^2e^{-qs}),\;s=a;\;.(388)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{r^2\,Sin.\,s\,x}{1-r^2\,Cos.\,s\,x}\,\frac{x\,Sin.^{2a}\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,(1-r^2\,e^{-qs})\ ,\ p=\tfrac{1}{2}\,s-2\,a;\ .\ (389)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{r^2\,Sin.\,s\,x}{1-r^2\,Cos.\,s\,x}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-3}\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,l(1-r^2\,e^{-qs})\,,p=\tfrac{1}{2}\,s-2\,a-1;\ .\ .\ (390)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{2\,r\,Sin.\,s\,x}{1-r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=(-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}\,,\ s>2\,a;.\ (391)$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-1}\,\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}-2\,r\right],\ s=2\,a;\ .\ (392)$$

$$\int_0^\infty Arctg.\frac{2r\,Sin.\,sx}{1-r^2}\,\frac{Cos.^a x\,Sin.\,px\,dx}{q^2+x^2}=2^{-a-2}\frac{\pi}{q}(e^q+e^{-q})^a(e^{pq}-e^{-pq})\,l\,\frac{1+re^{-qs}}{1-re^{-qs}}\,,p\leqq s-a;\ .(393)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{2\,r\,Sin.\,s\,x}{1-r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a}\,x.\,Cos.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}\ ,\ p<s-2\,a;\ .\ (394)$$

$$=(-1)^a\,2^{-2a-2}\,\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a}\,(e^{pq}+e^{-pq})\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}-2\,r\right],p=s-2\,a;\ .\ (395)$$

$$\int_0^\infty Arctang.\frac{2\,r\,Sin.\,s\,x}{1-r^2}\,\frac{x\,Sin.^{2a+1}\,x.\,Sin.\,p\,x\,d\,x}{q^2+x^2}=$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\,(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}\,,p<s-2\,a-1;\ .\ (396)$$

$$=(-1)^{a-1}\,2^{-2a-3}\,\pi\left[(e^q-e^{-q})^{2a+1}\,(e^{pq}-e^{-pq})\,l\,\frac{1+r\,e^{-qs}}{1-r\,e^{-qs}}-2\,r\right],p=s-2\,a-1;\ .\ (397)$$

Dans toutes ces formules la valeur numérique de r est assujettie à rester au-dessous de l'unité. Lorsqu'on prend $\frac{1}{r}$ au lieu de r, la valeur numérique de r reste toujours au-dessus de l'unité: dans ce cas les quatre dernières intégrales (391) à (397) ne changent pas quant à la fonction sous le signe d'intégration, ce qui arrive bien auprès des trois premières (388) à (390).

24. Toutes les intégrales déduites ici sont nouvelles, autant que je sache, et elles sont des exemples frappants de l'influence qu'une valeur spéciale d'une constante sous le signe d'intégration peut avoir sur la valeur de l'intégrale

elle-même; elles montrent d'ailleurs comment cette influence peut être différente auprès d'intégrales, dont la forme a d'une autre part une grande analogie.

Elles démontrent donc la nécessité des cas spéciaux, que nous avons admis auprès des théorèmes dans la partie première et troisième: ces théorèmes eux-mêmes ne sont peut-être pas seulement nouveaux en ce qu'ils s'occupent en particulier de chaque cas spécial.

Partout ici a désigne un nombre entier, p, q, r, s, t, au contraire, désignent des quantités positives en général, mais tout-à-fait arbitraires, tant au moins qu'ils ne sont pas liés quelquefois entre eux par des équations de condition.

Parmi les résultats obtenus il y a 210 sans aucune sommation, et 187 qui contiennent une sommation, mais de telle nature qu'elle peut être très-aisément évaluée pour chaque valeur spéciale de d ou de a. En effet ce sont des sommations, qui consistent d'un nombre de termes fini: seulement elles ne pouvaient être réduites à des formes fermées.

CORRECTIONS.

Page.	*Ligne.*	*au lieu de:*	*lisez.*
24	14	e^{+2aq}	e^{-2aq}
44	11	$[$	$[-$
51	6, 8	e^{-pq}	e^{pq}
	21	$e^{-(2a+1)q}$	$e^{(2a+1)q}$
54	3, 5	$e^{(r-2a-1)q}$	$e^{-(r-2a-1)q}$
	20	$\{e^{-pq}$	$\{e^{pq}$
68	8	$(1+e^{-2pq})$	$(1-e^{-2pq})$
72	11, 12	$\sum_{1}^{\infty}$	$\sum_{0}^{\infty}$
	16	$\frac{1}{r}-\frac{1}{1-r^2}$	$\frac{r}{1-r^2}$
	22	$\left\{\frac{1-r^2}{r}\right.$	$\left\{r\right.$
73	1	2^{-2a-1}	2^{-2a-2}
76	10, 12, 14	$2(1+r^2)$	$(1+r^3)$
78	7	$(e^{pq}-e^{-pq})$	$(e^{pq}+e^{-pq})$

CORRECTIONS

DE MA

NOTE SUR UNE MÉTHODE POUR LA RÉDUCTION D'INTÉGRALES DÉFINIES

ET SUR

SON APPLICATION à QUELQUES FORMULES SPÉCIALES.

Publiée dans les Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen. — Deel II.

Page.	*Ligne.*	*au lieu de:*	*lisez:*
2	6	dx	$dx =$
	27	$\int_{-}^{\infty}$	$\int_{-q}^{\infty}$
8	6	a	0
10	20	$A_{h+3}p^2$	$A_h + 3p^2$
	22	$\binom{h}{k m}$	$\binom{h}{k-m}$
12	5	nulles.	nulles. De même
13	9	$1^{h/1}$	$1^{4/1}$
15	5	e^{-px}	e^{+px}
	7	mettez le facteur $(px^2 + 2ax - p^2q^2)$ au dénominateur.	
	15	$pI_h + (2h-1)$	$pI_k + (2k-1)$
16	1, 2	$(-q^2)^{k+1}$	$(-q^2)^{k-1}$
	15	$(10p^2q^2$	$+(10p^2q^2$
22	15	$-\frac{4kq^4}{(x^4-q^4)^{k+1}}$	$+\frac{4kq^4}{(x^4-q^4)^{k+1}}$
	22	T_k	pT_k
22	23	U_k	pU_k
	24	V_k, V_{k+1}	pV_k, U_{k+1}
28	4	$l(q+x)^2$	$l(q-x)^2$
29	14	$1^{h/2}$	$1^{h/1}$
30	7	h	k
32	9	$2k-1$	$2h-1$
35	5 (*bis.*)	$k+2$	$k+1$
38	14	$h\Sigma$	4Σ
40	22	(4)	(11)
44	18 (*bis.*)	$\pm$	$+$
45	17	$(x-q^2)$	$(x-q)^2$
46	7	$I_{h,k}$	$F_{h,k}$
48	5	$x-q$	$x+q$
	17	$h.2x$	$k.2x$
49	4	$+hx^{-h-1}$	$-hx^{-h-1}$
	4 (*bis.*)	e^{-px}	e^{px}
	15	$+h-1$	$+k-1$
51	20	:	$=$
53	6	$= p\iota$	$= -p\iota$









